بنام خدا

مجموعه حاضر حل مسائلی در انتگرال دوگانه میباشد. در این مجموعه سعی شده است درخصوص موارد زیر به ترتیب اهمیت آنها، مطالب مهم و مورد توجه گنجانده شود. دانشجویان در ابتدا سعی نمایند نکات مهم در مسائل حل شده را با دقت مورد توجه قرار داده ودر هر بخش به طور جداگانه نسبت به حل تمرینات خواسته شده اقدام نمایند.

موارد مورد بررسی به شرح زیر میباشند

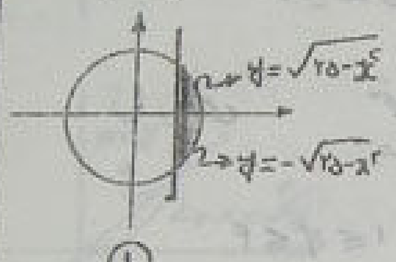
۱ – رسم ناحیه انتگرالگیری
۲ – محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات دکارتی
۳ – محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی
٤ – محاسبه انتگرال دوگانه با استفاده از تغییر متغیر
٥ – محاسبه انتگرال دوگانه غیر عادی
٦ – محاسبه سطح ناحیه به کمک انتگرال دوگانه
۷ – محاسبه حجم با استفاده از انتگرال دوگانه
۸ – محاسبه سطح رویه و انتگرال رویه ای

باقر کرامتی

ناحیه R را در هر یک از مسائل زیر رسم و حدود متغیرها را با توجه به اختیار نوارهای قائم یا افقی و یا در حالت قطبی مشخص نمائید.

① R سمت راست خط $x=3$ و داخل دایره $x^2+y^2=25$ می باشد.

$$R:\begin{cases}x\geq 3\\ x^2+y^2\leq 25\end{cases}$$

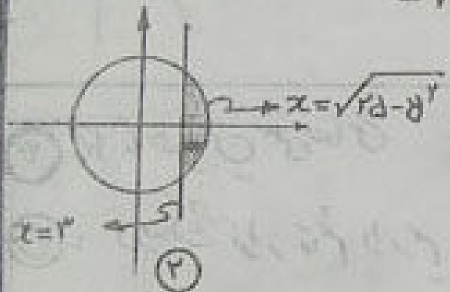


ح: درصورت استفاده از نوار قائم طبق شکل ① داریم

$y=\sqrt{25-x^2}$ منحنی بالا

$y=-\sqrt{25-x^2}$ 〃 پائین

$-\sqrt{25-x^2}\leq y\leq\sqrt{25-x^2}$ و $3\leq x\leq 5$



درصورت استفاده از نوار افقی طبق شکل ② داریم

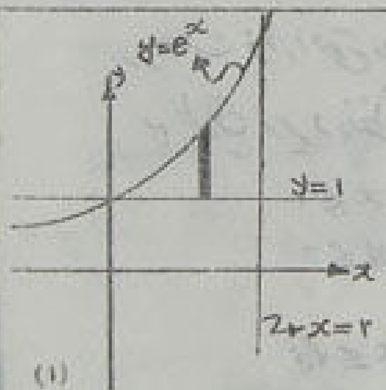
$x=\sqrt{25-y^2}$ منحنی راست

$x=3$ 〃 چپ

$3\leq x\leq\sqrt{25-y^2}$, $-4\leq y\leq 4$

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\ x=3\end{cases}\rightarrow 9+y^2=25\rightarrow y=\pm 4$$

② R ناحیه بین منحنی های $y=e^x$ ، $y=1$ و $x=2$ می باشد.

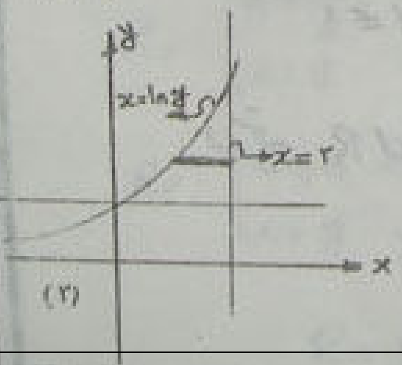


ح: درصورت استفاده از نوار قائم (شکل 1) داریم

$y=e^x$ منحنی بالا

$y=1$ 〃 پائین $\rightarrow$ $1\leq y\leq e^x$

$0\leq x\leq 1$



درصورت استفاده از نوار افقی (شکل 2) داریم

$x=\ln y$ منحنی چپ

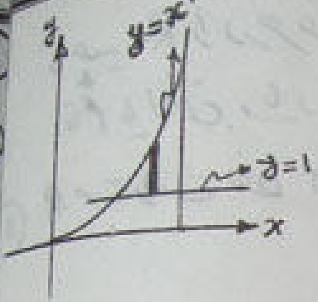
$x=2$ منحنی راست

$$\begin{matrix}y=e^x\\ x=2\end{matrix}\rightarrow y=e^2$$

$\ln y\leq x\leq 2$

$1\leq y\leq e^2$

③ R ناحیه بین منحنی های $y=x^2$ ، $x=2$ و $y=1$ می باشد.

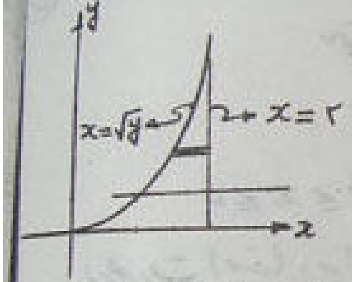


Ⓒ: نوار قائم

منحنی بالا $y=x^2$

" پائین $y=1$

$1\le x\le 2$ $\quad$ $1\le y\le x^2$



نوار افقی

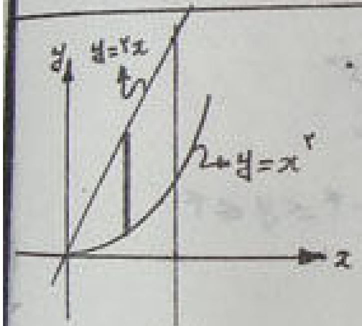
منحنی راست $x=2$

" چپ $x=\sqrt{y}$

$x=2$, $y=4$

$1\le y\le 4$ $\quad$ $\sqrt{y}\le x\le 2$

④ R ناحیه بین منحنی های $y=2x$ ، $y=x^2$ و $x\le 1$ می باشد.



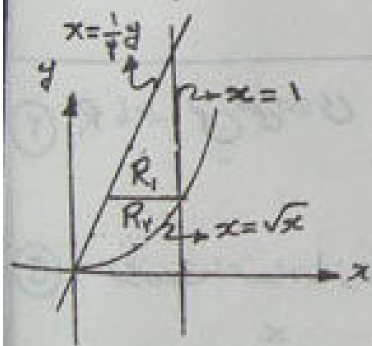
Ⓒ: درحالت نوار قائم داریم

منحنی بالا $y=2x$

" پائین $y=x^2$

$0\le x\le 1$ $\quad$ $x^2\le y\le 2x$

$x=1$, $y=x^2=1$



درحالت نوار افقی بایستی دو ناحیه R_1 و R_2 را به طریق زیر درنظر بگیریم

$R_1:\begin{cases} x=1 & \text{منحنی راست} \\ x=\frac{1}{2}y & \text{منحنی چپ} \end{cases}$ $\quad$ $\frac{y}{2}\le x\le 1$, $\quad 1\le y\le 2$

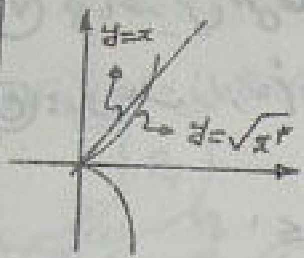
$x=1,\ y=2x\to y=2$

$R_2:\begin{cases} x=\sqrt{y} & \text{منحنی راست} \\ x=\frac{1}{2}y & \text{" چپ} \end{cases}$ $\quad$ $\frac{y}{2}\le x\le\sqrt{y}$, $\quad 0\le y\le 1$

درنتیجه R می تواند بصورت اجتماع این دو ناحیه باشد، یعنی

$R=R_1\cup R_2$

۵) R ناحیه‌ای بین منحنی‌های $y=x$ و $y^2=x^3$ می‌باشد.

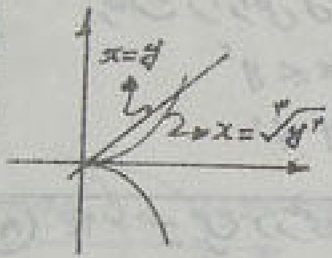


ح: درحالت نوار قائم داریم

$y=x$ منحنی بالا

$y=\sqrt{x^3}$ " پایین $\qquad \sqrt{x^3}\le y\le x$

$x=\sqrt{x^3}\to x=0,1 \qquad 0\le x\le 1$



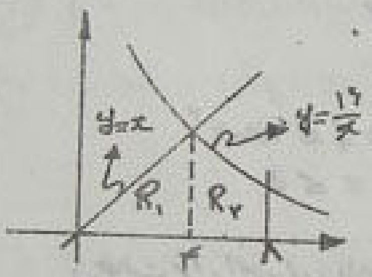
درحالت نوار افقی داریم

$x=\sqrt[3]{y^2}$ منحنی راست

$x=y$ " چپ $\qquad y\le x\le \sqrt[3]{y^2}$

$0\le y\le 1$

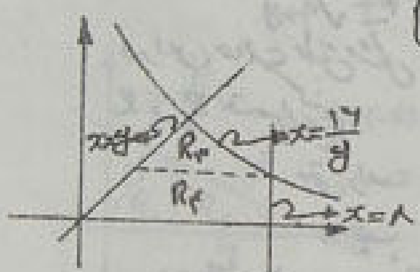
۶) R ناحیه بین منحنی‌های $xy=16$ ، $x=8$ ، $y=x$ و $y=0$ می‌باشد.



ح: درحالت نوار قائم، ناحیه را به دو ناحیه R_1 و R_2 بشکل زیر تقسیم می‌کنیم

$R_1:\begin{cases} y=x & \text{منحنی بالا} \\ y=0 & \text{منحنی پایین}\end{cases} \qquad \begin{matrix} 0\le y\le x \\ 0\le x\le 4\end{matrix}$

$\begin{cases} x=8 \\ y=\frac{16}{x}\to y=2\end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y=x \\ y=\frac{16}{x}\to x=4, y=4\end{cases}$



$R_2:\begin{cases} y=\frac{16}{x} & \text{بالا} \\ y=0 & \text{پایین}\end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} 0\le y\le \frac{16}{x} \\ 4\le x\le 8\end{matrix}$

$R=R_1\cup R_2$

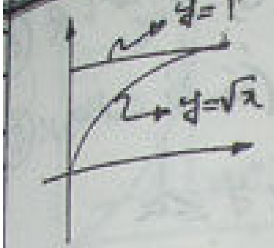
درحالت نوار افقی ناحیه را طبق شکل به دو ناحیه R_3 و R_4 بشکل زیر تقسیم می‌کنیم

$R_3:\begin{cases} x=\frac{16}{y} & \text{منحنی راست} \\ x=y & \text{" چپ}\end{cases} \qquad \begin{matrix} y\le x\le \frac{16}{y} \\ 2\le y\le 4\end{matrix}$

$R_4:\begin{cases} x=8 & \text{منحنی راست} \\ x=y & \text{" چپ}\end{cases} \qquad \begin{matrix} y\le x\le 8 \\ 0\le y\le 2\end{matrix}$

$R=R_3\cup R_4$

⑦ R ناحیه بین منحنی های $y=\sqrt{x}$ و $y=1$ می باشد.

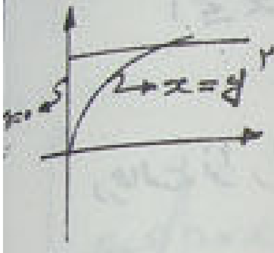


ح: در حالت نوار قائم داریم

$y=1$ منحنی بالا

$y=\sqrt{x}$ ″ پائین

$\sqrt{x} \le y \le 1 \qquad 0 \le x \le 1$

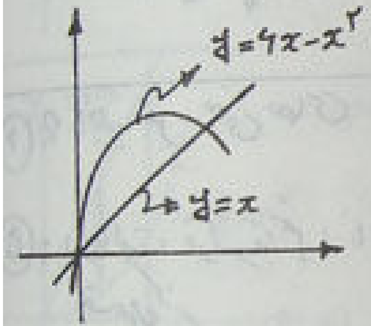


در حالت نوار افقی می توان نوشت

$x=y^2$ منحنی راست $\qquad 0 \le x \le y^2$

$x=0$ ″ چپ $\qquad 0 \le y \le 1$

⑧ R ناحیه بین دو منحنی $\begin{cases} y=6x-x^2 \\ y=x \end{cases}$ می باشد.



ح: در حالت نوار قائم می توان نوشت

$y=6x-x^2$ منحنی بالا

$y=x$ ″ پائین

$x=6x-x^2 \qquad x \le y \le 6x-x^2$

$x^2-5x=0 \qquad 0 \le x \le 5$

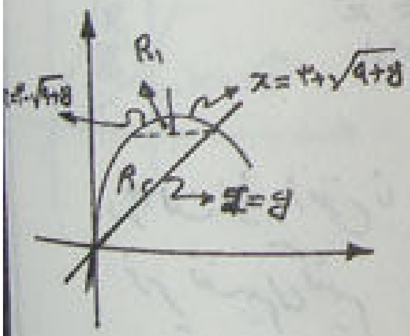
$x=0,5$

$y=0,5$

در حالت نوار افقی می توان نوشت

$x^2-6x-y=0 \qquad x=3\pm\sqrt{9+y}$

در این حالت طبق شکل ناحیه R را به دو ناحیه R_1 و R_2 تقسیم می کنیم



$R_1 : \begin{cases} x=3+\sqrt{9+y} & \text{منحنی راست} \\ x=3-\sqrt{9+y} & \text{″ چپ} \end{cases} \qquad 5 \le y \le 8$

$3-\sqrt{9+y} \le x \le 3+\sqrt{9+y}$

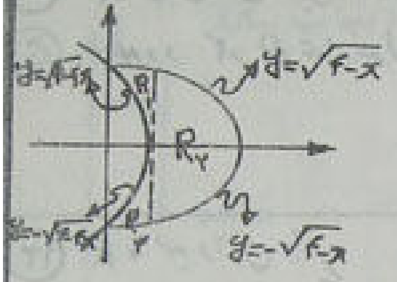
می توان با مشتق گرفتن نشان داد که نقطه ماکزیمم دارای مختصات $A\left|\begin{smallmatrix}3\\8\end{smallmatrix}\right.$ می باشد.

$R_2 : \begin{cases} x=3-\sqrt{9+y} & \text{منحنی چپ} \\ x=y & \text{″ راست} \end{cases} \qquad 0 \le y \le 5$

$3-\sqrt{9+y} \le x \le y$

$R=R_1 \cup R_2$

۹) R ناحیه‌ای بین منحنی‌های $y^2=4-x$ و $y^2=4-4x$ می‌باشد.

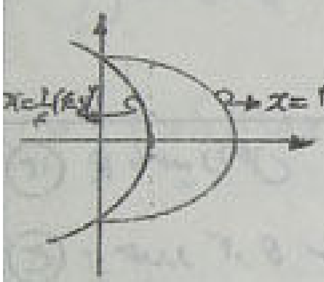


ج: درصورت استفاده از نوارهای قائم R به سه زیرناحیه R_1، R_2 و R_3 به شکل زیر افراز میگردد

$y^2=4-4x \longrightarrow y=\pm\sqrt{4-4x}$ نقاط برخورد

$y^2=4-x \longrightarrow y=\pm\sqrt{4-x}$ $(0,2)$ و $(0,-2)$

$R_1:\begin{cases} y=\sqrt{4-x} & \text{بالا} \\ y=\sqrt{4-4x} & \text{پایین}\end{cases}$ $\sqrt{4-4x}\le y\le\sqrt{4-x}$, $0\le x\le 1$



$R_2:\begin{cases} y=\sqrt{4-x} & \text{بالا} \\ y=-\sqrt{4-x} & \text{پایین}\end{cases}$ $-\sqrt{4-x}\le y\le\sqrt{4-x}$, $1\le x\le 4$

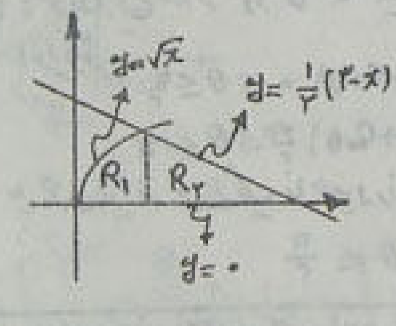
$R_3:\begin{cases} y=-\sqrt{4-4x} & \text{بالا} \\ y=-\sqrt{4-x} & \text{پایین}\end{cases}$ $-\sqrt{4-x}\le y\le -\sqrt{4-4x}$, $0\le x\le 1$

درصورت استفاده از منحنی‌های چپ و راست، حدود به شکل زیر می‌باشد

$x=4-y^2$ راست $\frac{1}{4}(4-y^2)\le x\le 4-y^2$

$x=\frac{1}{4}(4-y^2)$ چپ $-2\le y\le 2$

۱۰) R ناحیه بین $x=y^2$، $x+2y=3$ و $y=0$ می‌باشد



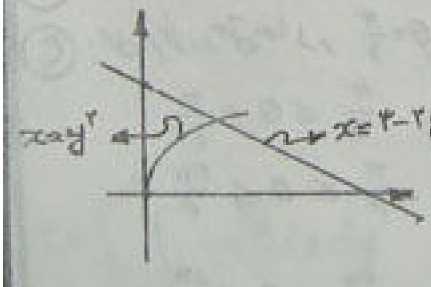
ج: از نظر منحنی‌های بالا و پایین R بایستی به دو زیرناحیه R_1 و R_2 به صورت زیر تقسیم گردد

$x+2y=3$ و $x=y^2 \longrightarrow (1,1)$ محل برخورد

$R_1:\quad \sqrt{x}\le y\le \frac{1}{2}(3-x) \quad 0\le x\le 1$

$R_2:\quad 0\le y\le \frac{1}{2}(3-x) \quad 1\le x\le 3$

$R=R_1\cup R_2$



منحنی‌های چپ و راست:

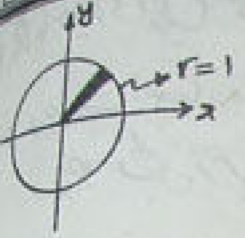
$x=3-2y$ راست

$x=y^2$ چپ

$y^2\le x\le 3-2y$

$0\le y\le 1$

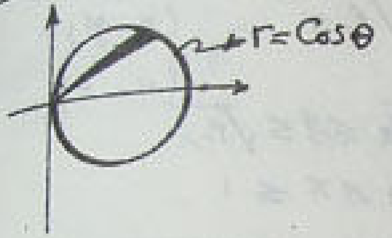
۱۱) R داخل منحنی قطبی $r=1$ می باشد.



ج: حدود r و θ عبارتند از

$$0\le r\le 1$$
$$0\le \theta\le 2\pi$$

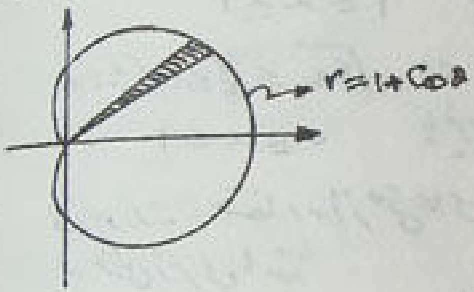
۱۲) R ناحیه داخل دایره $r=\cos\theta$ می باشد



ج: حدود r و θ عبارتند از

$$0\le r\le \cos\theta$$
$$-\frac{\pi}{2}\le \theta\le \frac{\pi}{2}$$

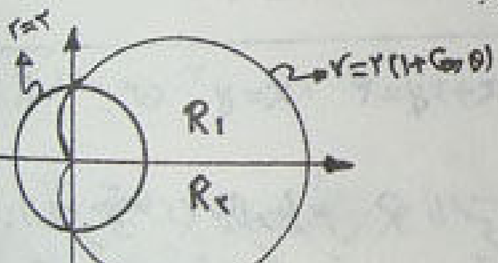
۱۳) R ناحیه داخل $r=1+\cos\theta$ می باشد.



ج: حدود r و θ به شکل زیر می باشد

$$0\le r\le 1+\cos\theta$$
$$0\le \theta\le 2\pi$$

۱۴) R ناحیه داخل $r=2(1+\cos\theta)$ و خارج $r=2$ می باشد.



ج: برای تعیین حدود r و θ ناحیه R می توان به دو ناحیه R_1 و R_2 افراز گردد

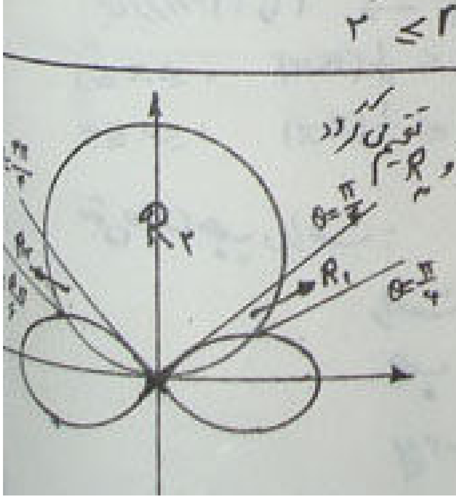
$R_1:\quad 2\le r\le 2(1+\cos\theta)\qquad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$R_2:\quad 2\le r\le 2(1+\cos\theta)\qquad \frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$

یا R می توان فقط یک ناحیه در نظر گرفته شود و با استفاده از تقارن خواهیم داشت

$$2\le r\le 2(1+\cos\theta)\qquad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

۱۵) R ناحیه خارج $r^2=8\cos 2\theta$ و داخل $r=4\sin\theta$ می باشد



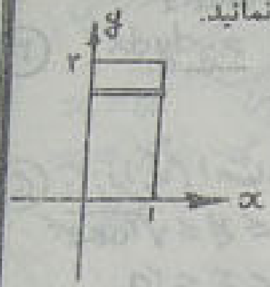
ج: محل برخورد منحنی ها در $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{5\pi}{6}$ می باشد. ناحیه به سه ناحیه R_1 و R_2 و R_3 تقسیم گردد

$R_1:\quad 2\sqrt{2\cos 2\theta}\le r\le 4\sin\theta\qquad \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$R_2:\quad 0\le r\le 4\sin\theta\qquad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$

$R_3:\quad 2\sqrt{2\cos 2\theta}\le r\le 4\sin\theta\qquad \frac{3\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{6}$

درهر یک از مسائل زیر ناحیه انتگرالگیری R وارسم ومقدار انتگرال را محاسبه نمائید.



① $I=\int_0^1\int_0^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx$

ح : ناحیه R یک مستطیلی به شکل $R:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}$ می باشد.

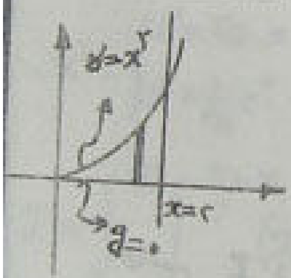
اگر از نوار قائم استفاده نماییم می توانیم بنویسیم

$$I=\int_0^1\int_0^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx=\int_0^1\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 dx$$

$$=\int_0^1\left(2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\frac{10}{3}$$

درصورت استفاده از منحنی های چپ وراست داریم

$$I=\int_0^2\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\left(x^3/3+xy^2\right)\Big|_0^1 dy=\int_0^2\left(\frac{8}{3}+y^2\right)dy=\frac{10}{3}$$



② $I=\int_0^2\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx$

ح : منحنی ها بالا و پایین می باشند و R عبارتست از $\begin{cases}0\le y\le x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases}$

لذا از نوار قائم استفاده شده است و داریم

$$I=\int_0^2\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx=\int_0^2\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)\Big|_0^{x^2}dx=\int_0^2\left(xe^{x}-x\right)dx=(x-1)e^{x}-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2=e^2-1$$

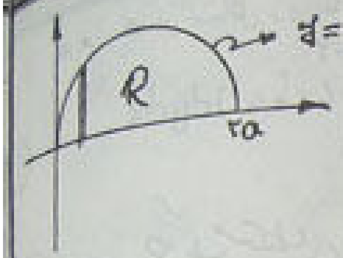
درحالت استفاده از منحنی های چپ و راست داریم منحنی چپ $x=\sqrt{y}$

" راست $x=2$

$0\le y\le 4$

$$I=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 e^{y/x}\,dx\,dy$$

انتگرال $\int_{\sqrt{y}}^2 e^{\frac{y}{x}}dx$ نسبت به x قابل حل نمی باشد لذا نمی توان محاسبه کرد.



(۳) $I=\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} xy\,dy\,dx$

ح: از نوار قائم استفاده شده است و R عبارت است از

$$R:\begin{cases} 0\le y\le \sqrt{2ax-x^2} \\ 0\le x\le 2a \end{cases}$$

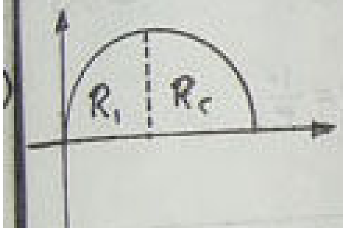
$y=0$ محور x ها و $y=\sqrt{2ax-x^2}$ دایره می باشد ،

$$y=\sqrt{2ax-x^2}\rightarrow y^2=2ax-x^2$$

$$\rightarrow x^2-2ax+y^2=0 \rightarrow (x-a)^2+y^2=a^2$$

$$I=\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} xy\,dy\,dx=\int_0^{2a}\left(\frac{x}{2}y^2\right)\Big|_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dx=\int_0^{2a}\frac{x}{2}(2ax-x^2)\,dx=\frac{2}{3}a^4$$

در صورت استفاده از نوار افقی ، R به دو ناحیه R_1 و R_2 تبدیل میگردد



$$y=\sqrt{2ax-x^2}\rightarrow x^2-2ax+y^2=0$$

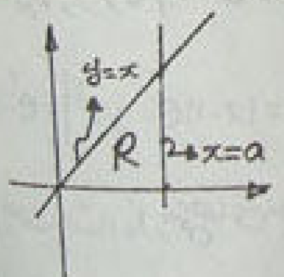
$$x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{a^2-y^2} \\ x=a-\sqrt{a^2-y^2} \end{cases} \qquad 0\le y\le a$$

$$\iint_R=\iint_{R_1}+\iint_{R_2}\rightarrow I=\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{x=a} xy\,dx\,dy+\int_0^a\int_{x=a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} xy\,dx\,dy$$

محاسبه I در حالت نوار قائم به مراتب بهتر از حالت استفاده از نوار افقی می باشد

(۴) $I=\int_0^a\int_0^x \frac{\cos y\cdot dy\,dx}{\sqrt{(a-x)(a-y)}}$



ح: از نوار قائم استفاده شده است و R عبارت است از :

$$0\le y\le x$$
$$0\le x\le a$$

$$I=\int_0^a\int_0^x\frac{\cos y\cdot dy\,dx}{\sqrt{(a-x)(a-y)}}=\int_0^a(a-x)^{-\frac{1}{2}}\left[\int_0^x\left(\frac{\cos y}{\sqrt{a-y}}\right)dy\right]dx$$

در این حالت چون $\int\frac{\cos y}{\sqrt{a-y}}dy$ قابل انتگرالگیری نمی باشد ، بایستی ترتیب انتگرالگیری را

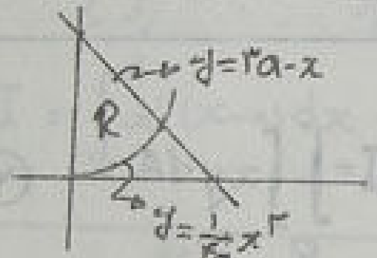
تغییر داد، ممکن است در حالت استفاده از نوار افقی بتوان انتگرال را محاسبه نمود. در این صورت منحنی های چپ و راست و حدود y به شکل زیر است

$x=a$ منحنی راست
$x=y$ " چپ
$0 \le y \le a$

$$\longrightarrow I=\int_0^a\int_y^a \frac{\cos y \, dx\,dy}{\sqrt{(x-a)(y-a)}}=\int_0^a \frac{\cos y}{\sqrt{y-a}}\left[\int_y^a (x-a)^{-\frac{1}{2}}dx\right]dy$$

$$\int_y^a (x-a)^{-\frac{1}{2}}dx = 2(x-a)^{\frac{1}{2}}\Big|_y^a = 2\left(0-\sqrt{y-a}\right)$$

$$\longrightarrow I=\int_0^a \frac{\cos y}{\sqrt{y-a}}\left(-2\sqrt{y-a}\right)dy=-2\int_0^a \cos y\,dy=-2\sin y\Big|_0^a=-2\sin a$$

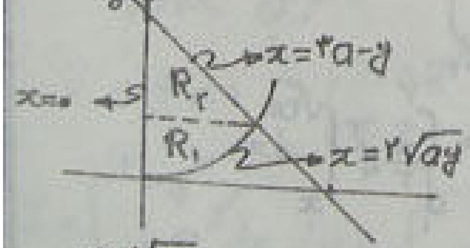


$$I=\int_0^{2a}\int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x}(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$R:\begin{cases} y=3a-x & \text{بالا} \\ y=\frac{1}{4a}x^2 & \text{پایین}\end{cases} \quad 0 \le x \le 2a$: از منحنی های بالا و پایین استفاده شده است ولذا:

$$I=\int_0^{2a}\int_{\frac{1}{4a}x^2}^{3a-x}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^{2a}\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x}dx$$

$$=\int_0^{2a}\left[x^2(3a-x)+\frac{1}{3}(3a-x)^3-\frac{x^4}{4a}-\frac{x^6}{192a^3}\right]dx=\frac{314}{35}a^4$$

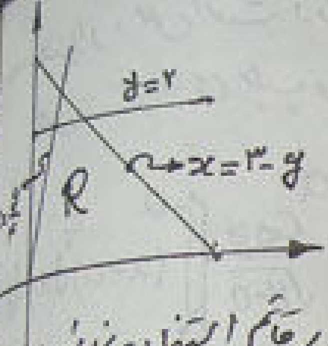


در صورت استفاده از نوار افقی باید ناحیه R به دو ناحیه R_1 و R_2 افراز گردد در این صورت

$$\iint_R=\iint_{R_1}+\iint_{R_2}$$

طبق شکل می توان نوشت

$$I=\int_0^a\int_0^{2\sqrt{ay}}(x^2+y^2)\,dx\,dy+\int_a^{3a}\int_0^{3a-y}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

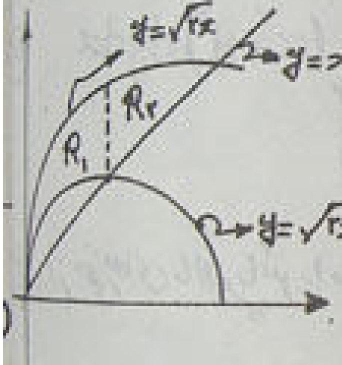


⑥ $I=\iint_R (x^2+y^2)\,dA$ ، R ناحیه محدود به منحنی های $y=4x$ ، $x+y=3$ ، $y=0$ و $y=2$ می باشد $(dA=dx\,dy)$

ح : در اینجا بهتر است از نوار افقی استفاده نمائیم زیرا اگر از نوار قائم استفاده نمائیم باید ناحیه را به سه قسمت تقسیم نمائیم که در واقع محاسبات بسیار طولانی تر می شود

$0 \le y \le 2$ ، منحنی چپ $x=\frac{1}{4}y$ ، منحنی راست $x=3-y$

$$I=\int_0^2\int_{\frac{1}{4}y}^{3-y}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Big|_{\frac{1}{4}y}^{3-y}dy=\int_0^2\left[\frac{(3-y)^3}{3}+(3-y)y^2-\frac{y^3}{192}-\frac{y^3}{4}\right]dy=9\frac{31}{48}$$



⑦ $I=\iint_R xy\,dA$ ، R ناحیه بین منحنی های $\begin{cases}x^2+y^2-2x=0\\ y^2=2x\\ y=x\end{cases}$ می باشد.

ح : اگر ناحیه R را به دو زیر ناحیه R_1 و R_2 طبق شکل افراز نمائیم آنگاه با استفاده از نوار قائم به راحتی می توان مقدار انتگرال را محاسبه نمود.

$R_1:\begin{cases}y=\sqrt{2x} & \text{منحنی بالا}\\ y=\sqrt{2x-x^2} & \text{〃 پائین}\end{cases}$

$0\le x\le 1$

$\begin{cases}x^2+y^2-2x=0\\ y=x\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}x=0\\x=1\end{matrix}$

$\begin{cases}y=\sqrt{2x}\\ y=x\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}x=0\\x=2\end{matrix}$

$R_2:\begin{cases}y=\sqrt{2x} & \text{منحنی بالا}\\ y=x & \text{〃 پائین}\end{cases}$

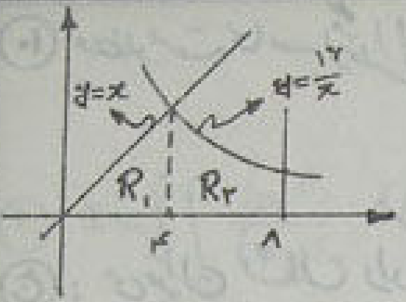
$1\le x\le 2$

$$I=\iint_R=\iint_{R_1}+\iint_{R_2}$$

$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}xy\,dy\,dx+\int_1^2\int_x^{\sqrt{2x}}xy\,dy\,dx=\int_0^1\frac{x}{2}y^2\Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}dx+\int_1^2\frac{x}{2}y^2\Big|_x^{\sqrt{2x}}dx$$

$$I=\int_0^1\frac{x}{2}(2x-2x+x^2)\,dx+\int_1^2\frac{x}{2}(2x-x^2)\,dx=\frac{7}{12}$$

⑧ $I=\iint_R x^2\,dA$ ، R ناحیه بین منحنی های $\begin{cases} xy=16 \\ y=x \\ y=0 \\ x=8 \end{cases}$ می باشد.



حل : اگر R را به دو ناحیه R_1 و R_2 طبق شکل افراز نمائیم می توانیم از نوارهای قائم استفاده نمائیم. البته می توان R را طوری افراز نمود که از نوار افقی نیز استفاده نمائیم

$R_1: \begin{cases} 0 \le y \le x \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$

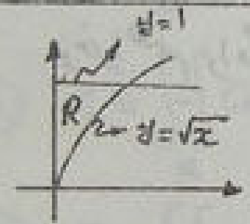
$R_2: \begin{cases} 0 \le y \le \frac{16}{x} \\ 4 \le x \le 8 \end{cases}$

$$I=\iint_{R_1}+\iint_{R_2}$$

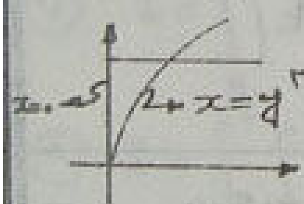
$$I=\int_0^4\int_0^x x^2\,dy\,dx+\int_4^8\int_0^{\frac{16}{x}} x^2\,dy\,dx=\int_0^4 x^2y\Big|_0^x dx+\int_4^8 x^2y\Big|_0^{\frac{16}{x}}dx$$

$$I=\int_0^4 x^2(x-0)\,dx+\int_4^8 x^2\left(\frac{16}{x}-0\right)dx=448$$

⑨ مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$.



حل : انتگرال $\int e^{y^3}dy$ قابل محاسبه نمی باشد زیرا مشتق y^3 در انتگرال موجود نمی باشد. اکنون ترتیب انتگرالگیری را تغییر، ممکن است سهولتی در محاسبه انتگرال ایجاد شود.



در حالت اول ناحیه R شکل $\begin{cases} \sqrt{x} \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ می باشد

منحنی بالا $y=1$

" پایین $y=\sqrt{x}$

اکنون با استفاده از نوار افقی می توان نوشت $\begin{cases} x=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ ، $0 \le y \le 1$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_0^1\int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy=\int_0^1 x e^{y^3}\Big|_0^{y^2}dy=\int_0^1\left(y^2e^{y^3}-0\right)dy$$

$$I=\frac{1}{3}e^{y^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e-1)$$

(۱۰) مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(\sin x+y^3+3)\,dA$$

ح: می‌توان نشان داد که در یک انتگرال دوگانه اگر ناحیه R نسبت به محورهای مختصات متقارن باشد و توابع $f(x)$ یا $g(y)$ فرد باشند آنگاه

$$\iint_R f(x)\,dA=0 \quad , \quad \iint_R g(y)\,dA=0$$

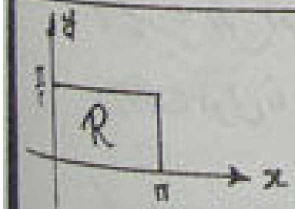
همانطور که مشاهده میشود میدان $R: x^2+y^2\le 1$ نسبت به محورهای مختصات متقارن می‌باشد و توابع y^3 و $\sin x$ فردی باشند به این ترتیب:

$$\iint_R y^3\,dA=\iint_R \sin x\,dA=0$$

و خواهیم داشت

$$I=\iint_R \sin x\,dA+\iint_R y^3\,dA+3\iint_R dA$$

$$I=0+0+3\iint_R dA=3(\text{مساحت دایره } R)=3(\pi)=3\pi$$



(۱۱) $I=\iint_R e^{x+\sin y}\cos y\,dA \qquad R:\begin{cases}0\le x\le \pi\\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$

ح: طبق ناحیه R، I بشکل زیر محاسبه می‌شود

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x+\sin y}\cos y\,dy\,dx=\int_0^{\pi} e^x\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,e^{\sin y}\,dy\right]dx=\int_0^{\pi} e^x\cdot e^{\sin y}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$I=(e-1)\int_0^{\pi} e^x\,dx=(e^{\pi}-1)(e-1)$$

تمرینات برای حل

۱- مطلوبست محاسبه انتگرال های زیر

(۱) $I=\iint_R \frac{x^2}{1+y^2}\,dA \qquad R: \begin{matrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1\end{matrix}$

(۲) $I=\iint_R \frac{dA}{(x+y+1)^2} \qquad R: \begin{matrix} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1\end{matrix}$

(۳) $I=\iint_R x^2 y \cos(x y^2)\,dA \qquad R: \begin{matrix} 0\le x\le \frac{\pi}{2} \\ 0\le y\le 2\end{matrix}$

(۴) $I=\iint_R (x^2+y^2)\,dA \qquad R: \begin{matrix} y=x^2 \\ y^2=x\end{matrix}$

(۵) $I=\iint_R (x+y)\,dA \qquad R: \begin{matrix} A(2,2) \\ B(1,-1) \\ C(-2,-2) \\ D(-1,1)\end{matrix}$ ناحیه داخل متوازی الاضلاع به رئوس

(۶) $I=\iint_R \cos(x+y)\,dA \qquad R: \begin{cases} x=0 \\ y=\pi \\ y=x\end{cases}$

(۷) $I=\iint_R x^2 y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dA \qquad R: \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0\end{cases}$

(۸) $I=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} |x^2 y^3|\,dy\,dx$

(۹) $I=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} [x^2]\,y^3\,dy\,dx$

(۱۰) $I=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} [x^2]\,|y^3|\,dy\,dx$

(۱۱) $I=\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{2x} \cos(\pi x^2)\,dy\,dx$

(۱۲) $I=\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

(۱۳) $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x-y|\,dy\,dx$

(۱۴) $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx$

(۱۵) $I=\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

۲- در انتگرال‌های زیر ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر دهید

(۱۶) $$I=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$$

(۱۷) $$I=\int_{-1}^{1} dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$$

(۱۸) $$I=\int_0^a dx\int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy$$

(۱۹) $$I=\int_{-2}^{2}\int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}} f(x,y)\,dy\,dx$$

(۲۰) $$I=\int_1^2\int_x^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$$

(۲۱) $$I=\int_0^2\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

(۲۲) $$I=\int_0^1\int_0^{x} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

(۲۳) $$I=\int_0^1\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^3\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(۲۴) $$I=\int_0^1\int_0^{\frac{1}{4}x^2} f(x,y)\,dy\,dx+\int_1^2\int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy\,dx$$

جواب تمرینات

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) $\ln\frac{3}{4}$

۳) $\frac{-\pi}{16}$

۴) $\frac{32}{140}$

۵) 0

۶) -2

۷) $\frac{4}{135}$

۸) $\frac{8}{3}$

۹) 0

۱۰) $5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$

۱۱) $\frac{-\sqrt{2}}{28}$

۱۲) $\frac{1}{5}$

۱۳) $\frac{1}{3}$

۱۴) $\frac{1}{2}$ و $\frac{-1}{2}$ $\longrightarrow$ دارای انتگرال دوگانه نمی باشد زیرا $f(x,y)$ در $(0,0)$ ناپیوسته است

۱۵) $\frac{e-1}{2}$

۱۶) $$I=\int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$$

۱۷) $$I=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

۱۸) $$I=\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

۱۹) $$I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

۲۰) $$I=\int_1^2\int_1^y f(x,y)\,dx\,dy+\int_2^4\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$$

۲۱) $$I=\int_0^4\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_4^6\int_0^{6-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

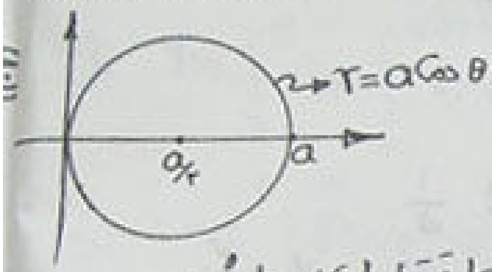
۲۲) $$I=\int_0^1\int_y^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

۲۳) $$I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\,dy$$

۲۴) $$I=\int_0^1\int_{\frac{y}{2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

در هر یک از مسائل زیر ناحیه R را رسم و با استفاده از مختصات قطبی مقدار انتگرال را محاسبه نمائید.

① مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA$ ، $R: x^2+y^2\le ax$



ح: R دایره‌ای طبق شکل است

$$x^2+y^2-ax=0$$

$$r^2-ar\cos\theta=0 \qquad r=0 \text{ و } r=a\cos\theta$$

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ← زیرا شکل نسبت به محور xها متقارن می‌باشد.

به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\cdot d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{a\cos\theta} r(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}dr\right]\cdot d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{a\cos\theta}\cdot d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\left[(a^2-a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

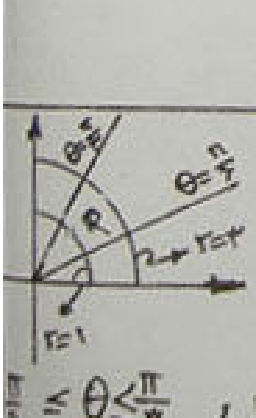
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{3}(a^3\sin^3\theta-a^3)d\theta=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta$$

$$I=\frac{a^3}{3}\left[\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\sin\theta\cdot d\theta\right]=\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$$

$$u=\cos\theta$$
$$du=-\sin\theta\cdot d\theta$$

---

② مطلوبست محاسبه $I=\iint_R \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dA$



$$R:\begin{cases} x^2+y^2\ge 1\\ x^2+y^2\le 9\\ y\ge \frac{x}{\sqrt{3}}\\ y\le x\sqrt{3}\end{cases}$$

ح: می‌توان نوشت

$$\begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt{3}}x=(\mathrm{tg}\frac{\pi}{6})x\\ y=\sqrt{3}x=(\mathrm{tg}\frac{\pi}{3})x\end{cases}$$

به این ترتیب $1\le r\le 3$ و $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$

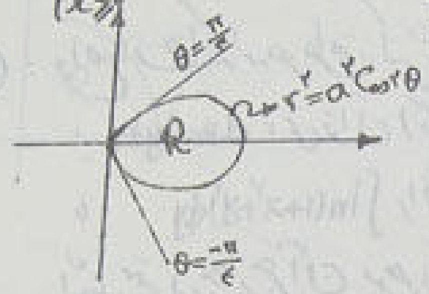
$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^3 \mathrm{ArcTg}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)r\,dr\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_1^3 r\,dr\right]\theta\cdot d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{r^2}{2}\Big|_1^3\cdot\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(9-1)\theta\,d\theta$$

$$I=4\left(\frac{1}{2}\theta^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\mathrm{ArcTg}(\mathrm{tg}\,\theta)=\theta$$

۳) مطلوبست محاسبه انتگرال

$$R:\begin{cases} r^2=a^2\cos 2\theta \\ x\ge 0\end{cases} \quad ، \quad I=\iint_R \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+a^2}}$$



ح : طبق شکل حدود θ و r شکل زیر می باشد

$$-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$$

$$0\le r\le a\sqrt{\cos 2\theta}$$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos2\theta}} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+a^2}}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(r^2+a^2)^{\frac12}\Big|_0^{a\sqrt{\cos2\theta}}d\theta$$

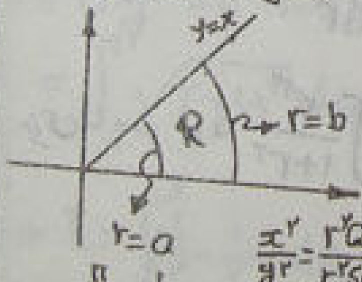
$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{a^2\cos2\theta+a^2}-\sqrt{a^2}\right]d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[a\sqrt{2}\cos\theta-a\right]d\theta=2a-\frac{\pi}{2}a$$

$$a^2\cos2\theta+a^2=a^2(\cos2\theta+1)=2a^2\cos\theta$$

---

۴) مطلوبست محاسبه انتگرال

$$R:\begin{cases}a^2\le x^2+y^2\le b^2\\ y\le x\\ x\ge 0\ ,\ y\ge 0\end{cases} \qquad I=\iint_R \frac{y^2}{x^2}\,dA$$



$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}=tg^2\theta$$

ح : طبق شکل R یک قسمت از حلقه ای بین خطوط $y=0$ و $y=x$ می باشد. به این ترتیب بهترین حالت برای محاسبه انتگرال فوق استفاده از مختصات قطبی می باشد.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^b tg^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2\theta\left(\tfrac12 r^2\right)\Big|_a^b d\theta=\frac12(b^2-a^2)\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2\theta\,d\theta$$

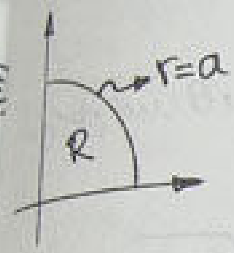
$$I=\frac12(b^2-a^2)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[(1+tg^2\theta)-1\right]d\theta=\frac12(b^2-a^2)(tg\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I=\frac{4-\pi}{8}(b^2-a^2)$$

۵) مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I=\iint_R \ln(1+x^2+y^2)\,dA$$

$x^2+y^2\le a^2$
$x\ge 0,\ y\ge 0$



ح: واضح است که به هر طریقی که dA باشد یعنی $dA=dxdy$ یا $dA=dydx$، نمی‌توان انتگرال $\int \ln(1+x^2+y^2)\,dx$ یا $\int \ln(1+x^2+y^2)\,dy$ را محاسبه نمود زیرا مشتق داخل لگاریتم در خارج آن موجود نمی‌باشد ولی ظاهراً به نظر می‌رسد که اگر از مختصات قطبی استفاده نمائیم، این مشکل مرتفع گردد. طبق شکل حدود r و θ به صورت زیر می‌باشد

$$0\le r\le a$$
$$0\le \theta\le \frac{\pi}{2}$$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$$

ابتدا انتگرال $\int \ln(1+r^2)\cdot r\,dr$ را محاسبه می‌نمائیم. با استفاده از روش جزء به جزء می‌توان نوشت

$$u=\ln(1+r^2) \rightarrow du=\frac{2r}{1+r^2}\,dr$$
$$dv=r\,dr \qquad v=\frac{1}{2}r^2$$

$$\Rightarrow \int \ln(1+r^2)\,r\,dr=\frac{1}{2}r^2\ln(1+r^2)-\int\frac{1}{2}\,\frac{2r^3}{1+r^2}\,dr$$

برای محاسبه $\int \frac{r^3}{1+r^2}\,dr$ ، صورت کسر داخل انتگرال را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، لذا خواهیم داشت

$$\int\left(r-\frac{r}{1+r^2}\right)dr=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}\ln(1+r^2)$$

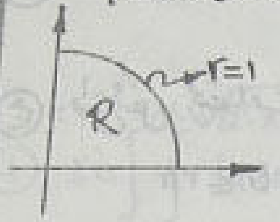
به این ترتیب داریم

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2\ln(1+r^2)-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^a d\theta$$

$$I=\left[\frac{1}{2}a^2\ln(1+a^2)-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\ln(1+a^2)\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta=\frac{\pi}{4}\left[(1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2\right]$$

(۶) مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\iint_R \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dA$

$R:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$



(حل) : تابع زیر علامت انتگرال به گونه‌ای است که در مختصات دکارتی نمی‌توان برحسب x انتگرال گرفت و نه برحسب y. اما اگر از دستگاه قطبی کمک بگیریم امکان دارد بتوان انتگرال را محاسبه نمود. با توجه به ناحیه R طبق شکل حدود r و θ بشکل زیر باشند

$0\le r\le a$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

به این ترتیب انتگرال بشکل زیر تبدیل میگردد

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\right]d\theta$$

ابتدا انتگرال $\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr$ را محاسبه می‌نمائیم. در این انتگرال توسط تغییر $u^2=1+r^2$ را درنظر میگیریم لذا خواهیم داشت

$u^2=1+r^2\to u\,du=r\,dr$

$r=0\to u=1$

$r=1\to u=\sqrt{2}$

$r^2=u^2-1\to 1-r^2=2-u^2$

$$\to\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-u^2}{u^2}}\cdot u\,du$$

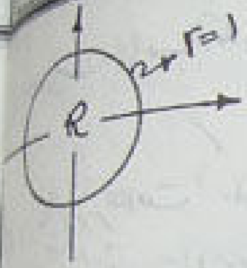
$$=\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{2-u^2}\,du=\left[\frac{u}{2}\sqrt{2-u^2}+\arcsin\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

$$\to I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)d\theta$$

$$I=\left(\frac{\pi-2}{4}\right)\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$$

در این انتگرال $u=\sqrt{2}\sin t$ درنظر گرفته شده است، که برای محاسبه جواب را ننوشته‌ام.



۷) مطلوبست محاسبه انتگرال که

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(a-2x-3y)\,dA$$

ج: طبق شکل در مختصات قطبی حدود r و θ بشکل زیر است

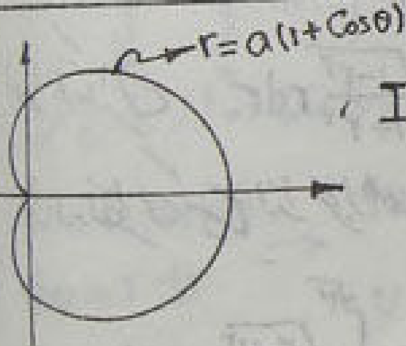
$$0\le r\le 1 \quad , \quad 0\le \theta\le 2\pi$$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (a-2r\cos\theta-3r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1 [ar-(2\cos\theta+3\sin\theta)r^2]\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{a}{2}r^2-\frac{1}{3}(2\cos\theta+3\sin\theta)r^3\right]\Big|_0^1 d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{3}\cos\theta-\sin\theta\right)d\theta=\left(\frac{a}{2}\theta-\frac{2}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi a$$



۸) مطلوبست محاسبه انتگرال که $I=\iint_R y^2\,dA$ ، R ناحیه محدود به منحنی $r=a(1+\cos\theta)$ می باشد.

ج: با توجه به ناحیه انتگرالگیری حدود r و θ به صورت زیر می باشد

$$0\le r\le a(1+\cos\theta)$$
$$0\le\theta\le 2\pi$$

در نتیجه داریم

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)}(r\sin\theta)^2\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta)\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{a(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$I=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)^4\,d\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)^2\,d\theta$$

پس از انتگرالگیری خواهیم داشت

$$I=\frac{21}{32}\pi a^4$$

تمرینات برای حل

۱- با استفاده از مختصات قطبی انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

① $I=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy\,dx$

② $I=\iint_R \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dA$ $\quad R:\begin{cases} x^2+y^2\le 1\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

③ $I=\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA$ $\quad R: x^2+y^2\le ax$

④ $I=\iint_R \operatorname{Arctg}\dfrac{y}{x}\,dA$ $\quad R:\begin{cases} x^2+y^2\ge 1\\ x^2+y^2\ge 9\\ y\ge \frac{1}{\sqrt{3}}x\\ y\le\sqrt{3}x\end{cases}$

⑤ $I=\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA$ $\quad R:$ $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ ناحیه داخل حلقه $\quad x\ge 0$

۲- در انتگرالهای زیر حدود را در دستگاه قطبی بنویسید

⑥ $I=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$

۷ $I=\int_0^2\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$

⑧ $I=\iint_R f(x,y)\,dA$ $\quad R:\begin{cases} y=-x\\ y=x\\ y=1\end{cases}$

⑨ $I=\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 f\left(\dfrac{y}{x}\right)dy\,dx$

⑩ $I=\iint_R f(x,y)\,dA$

$R:$ $x^2+y^2=ax$ ناحیه محدود به دایره

جواب تمرینات

۱) $\frac{\pi}{4}\left[(1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2\right]$

۲) $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$

۳) $\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$

۴) $\frac{\pi^2}{9}$

۵) $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{34\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^3}{2}$

۶) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

۷) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,r\,dr\,d\theta$

۸) $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

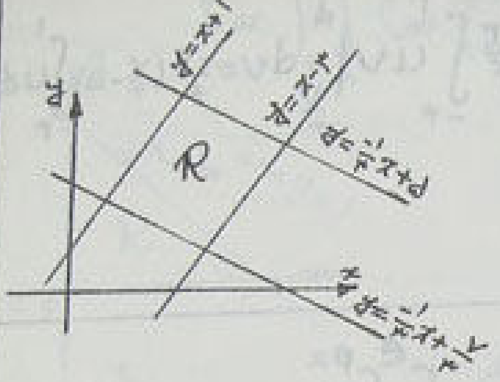
۹) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\mathrm{tg}\,\theta)\,d\theta\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\mathrm{tg}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(\mathrm{tg}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta$

۱۰) $I=\int_0^{\pi}\int_0^{a\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

با استفاده از تغییر متغیر مناسب انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

① $I = \iint_R (y-x)\, dA$

$$R: \begin{cases} y-x=-3 \\ y-x=1 \\ y+\frac{x}{3}=\frac{7}{3} \\ y+\frac{x}{3}=5 \end{cases}$$



②: اگر بخواهیم این انتگرال را در مختصات دکارتی محاسبه نمائیم بایستی به لحاظ استفاده از منحنی‌های بالا و پائین یا چپ و راست، ناحیه R را به سه زیر ناحیه تقسیم نمائیم که در این صورت محاسبه انتگرال طولانی و حجیم می‌شود. لذا ممکن است با استفاده از تغییر متغیر مناسب انتگرال را به روش ساده‌تری محاسبه نمود. در این مسأله به نظر می‌آید بهترین تعویض متغیر به شکل زیر باشد

$u = y - x \quad , \quad v = y + \frac{1}{3}x$

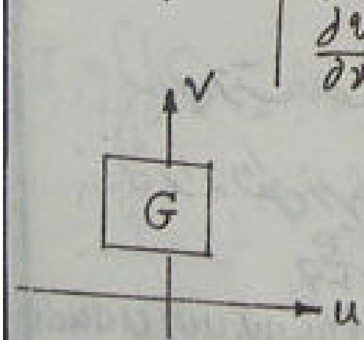
بدین ترتیب ژاکوبی تبدیل به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

در اینجا چون x و y برحسب u و v نمی‌باشند، می‌توان از دستور زیر استفاده نمود. البته می‌توان x و y را برحسب u و v محاسبه نمود.

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1-\frac{1}{3} = -\frac{4}{3} \rightarrow J(u,v) = -\frac{3}{4}$$



با توجه به ناحیه R، ناحیه G در دستگاه u و v به شکل زیر رسم میگردد:

$y-x=1 \rightarrow u=1$
$y-x=-3 \rightarrow u=-3$
$y+\frac{x}{3}=\frac{7}{3} \rightarrow v=\frac{7}{3}$ و $y+\frac{x}{3}=5 \rightarrow v=5$

بدین ترتیب با توجه به اینکه $y-x=u$ قرار $\iint_R (y-x)\, dA$ در دستگاه u و v

(۳) $I=\iint_G u\,dA_1=\int_{-3}^{1}\int_{\frac{v}{4}}^{5}\frac{-3}{4}u\,dv\,du=\frac{-3}{4}\int_{-3}^{1}uv\Big|_{\frac{v}{4}}^{5}dv=\frac{-3}{4}\left(\frac{v}{4}-5\right)\int_{-3}^{1}u\,du$

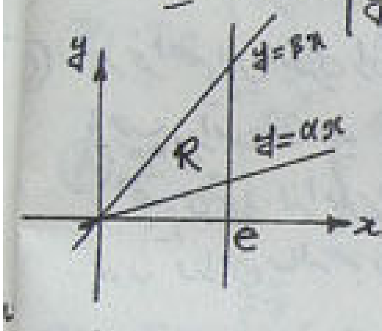
$$I=-8$$

(۴)

$dA_1=J(u,v)\,du\,dv$

---

(۲) $I=\int_0^e\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy\,dx \qquad 0<\alpha<\beta$ ، از تغییر متغیر $\begin{cases}x=u-uv\\ y=uv\end{cases}$ استفاده نمائید.



(۴) : با این تغییر متغیر، ژاکوبی به شکل زیر بدست می آید

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u$$

با توجه به ناحیه R، حدود ناحیه G در دستگاه u و v بشکل زیر خواهد بود

$$\begin{matrix}x=u-uv\\ y=uv\end{matrix}\ \rightarrow\ x=u-y\rightarrow\begin{cases}y=\alpha x\rightarrow x=u-\alpha x\rightarrow u=(1+\alpha)x\\ y=\beta x\rightarrow x=u-\beta x\rightarrow u=(1+\beta)x\end{cases}$$

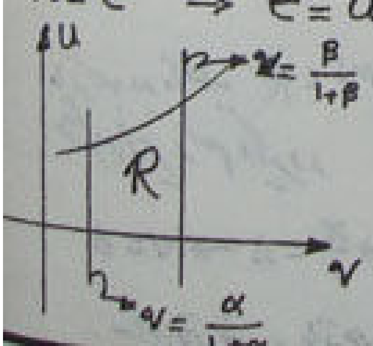
$$\begin{matrix}y=uv\\ x\neq 0\end{matrix}\rightarrow\begin{cases}y=\alpha x\\ u=(1+\alpha)x\end{cases}\rightarrow \alpha x=v(1+\alpha)x\rightarrow v=\frac{\alpha}{1+\alpha}$$

$$\begin{matrix}y=uv\\ x\neq 0\end{matrix}\rightarrow\begin{cases}y=\beta x\\ u=(1+\beta)x\end{cases}\rightarrow \beta x=v(1+\beta)x\rightarrow v=\frac{\beta}{1+\beta}$$

$$x=0,\ y=0\rightarrow\begin{cases}u-uv=0\\ uv=0\end{cases}\rightarrow u=0$$

$$x=e\rightarrow e=u-uv\rightarrow u=\frac{e}{1-v}$$

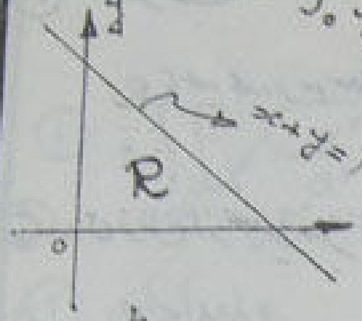
به این ترتیب ناحیه G می تواند بشکل زیر باشد و مقدار انتگرال بصورت زیر تبدیل میگردد



$$I=\int_0^e\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy\,dx=\int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}}\int_0^{\frac{e}{1-v}}f(u-uv,uv)\,u\,du\,dv$$

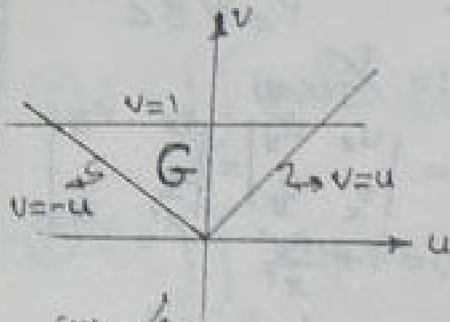
(۳) مطلوب است محاسبه انتگرال

$$I=\int_0^1\int_0^{1-y}\cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$$



شکل (۱)

ح : این انتگرال در دستگاه دکارتی و قطبی به هیچ طریق قابل حل نمی باشد زیرا مشتق زاویه یعنی $\frac{x-y}{x+y}$ نسبت x و y موجود نمی باشد.
اگر از تعویض متغیرهای $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$ استفاده نمائیم مقدار انتگرال به راحتی بدست می آید. برای این کار به شرح زیر عمل می نمائیم



شکل (۲)

$$\iint_R f(x,y)\,dA_1=\iint_G h(u,v)\,|J(u,v)|\,dA_2$$

$dA_1=dy\,dx \qquad dA_2=dv\,du$

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}\ ,\quad J(x,y)=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$$

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\ \rightarrow\ J(u,v)=\frac{1}{2}$$

برای مشخص کردن ناحیه G در دستگاه uv از مرزهای ناحیه R در دستگاه xy استفاده می نمائیم.

$$x+y=1\ \rightarrow\ v=1$$

$$y=0\ \rightarrow\ \begin{cases}u=x-0\\ v=x+0\end{cases}\rightarrow\ u=v\ ,\quad x=0\rightarrow\begin{cases}u=0-y\\ v=0+y\end{cases}\rightarrow\ v=-u$$

به این ترتیب شکل ۲ ناحیه G در دستگاه uv بدست می آید.
مقدار انتگرال به شرح زیر خواهد بود

$$I=\iint_G\cos\frac{u}{v}\,dA_2=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,du\,dv$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left(\sin\frac{u}{v}\right)\Big|_{-v}^{v}\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1(2\sin 1)\,v\,dv$$

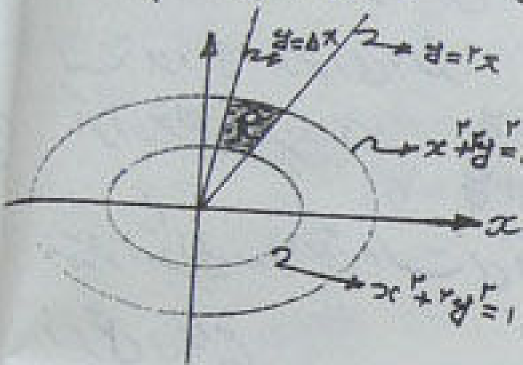
$$I=\frac{1}{2}\sin(1)$$

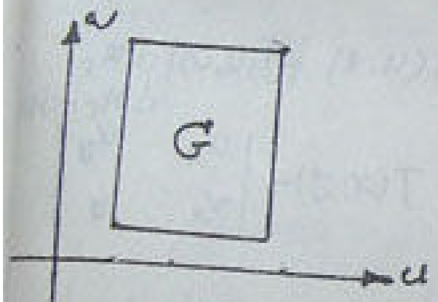
مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I=\iint_R dA$$

R ناحیه محدود به منحنی های زیر است

$$\begin{cases} x^2+2y^2=1\ , & x^2+2y^2=4 \\ y=2x\ , & y=5x \end{cases}$$





می توان از تغییر متغیرهای زیر استفاده نمود

$$u=x^2+2y^2 \rightarrow \quad 1\le u\le 4$$

$$v=\frac{y}{x} \qquad 2\le v\le 5$$

$$J(u,v)=1/J(x,y)$$

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 4y \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}$$

$$J(x,y)=2+\frac{4y^2}{x^2}$$

$$J(u,v)=\frac{1}{2+4(\frac{y}{x})^2}=\frac{1}{2(1+2v^2)}$$

به این ترتیب طبق شکل (۲) می توان نوشت

$$I=\iint_G h(u,v)\,|J(u,v)|\,dA_2=\int_2^5\int_1^4\frac{du\,dv}{2(1+2v^2)}=\int_2^5\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctg}\,\sqrt{2}v\Big|_1^4 du$$

$$I=\frac{3}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{Arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

تمرینات برای حل

با استفاده از تعویض متغیر انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید

① $I=\iint_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dA \qquad R: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

② $I=\iint_R dA \qquad R: \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ ناحیه محدود به خم

③ $I=\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dA \qquad u=y-x,\ v=y+x \qquad R: C\big|_1^0, B\big|_0^1, A\big|_0^0$ مثلثی به رئوس

④ $I=\int_0^1\int_x^{2x} dy\, dx \qquad x=u(1-v),\ y=uv$

⑤- اگر $x=u^2-v^2$ و $y=2uv$ و ناحیه R در صفحه uv بشکل زیر باشد

$$R_{uv}: \begin{array}{l} 1\le u\le 2 \\ -1\le v\le 1 \end{array}$$

مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_{R_{xy}} x\, dA$. (ناحیه R_{xy} را نیز رسم کنید)

⑥ مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$I=\iint_R (x-y)^2 \sin^2(x+y)\, dA \qquad R: A\big|_0^\pi, B\big|_\pi^{2\pi}, C\big|_{2\pi}^\pi, D\big|_\pi^0$ متوازی الاضلاع با رئوس

⑦- مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_R (x^2+y^2)\, dA$ ، R ناحیه محدود به منحنی های زیر می باشد

$x^2-y^2=1 \ ,\ x^2-y^2=9 \ ,\ xy=2 \ ,\ xy=4$

جواب تمرینات

① $\frac{۲\pi}{۳}ab$

② $ab\left[\left(\frac{a^۲}{h^۲}-\frac{b^۲}{k^۲}\right)\operatorname{Arctg}\frac{ak}{bh}+\frac{ab}{hk}\right]$

③ $\frac{۱}{۴}(e-e^{-۱})$

④ $\frac{۱}{۲}$

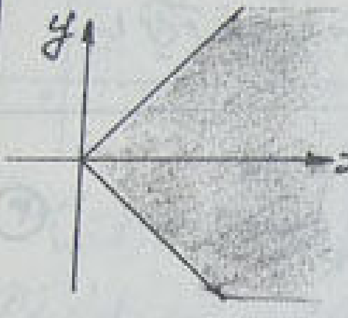
⑤ ۴۸

⑥ $\frac{\pi^۴}{۳}$

⑦ ۸

در هریک ازمسائل زیر ابتدا ناحیه R را رسم ،سپس همگرائی یاواگرائی انتگرالهای دوگانه زیر را بررسی نمائید.

① $I=\iint_R e^{-x^2}\,dA \qquad R: -x\le y\le x,\ x\ge 0$



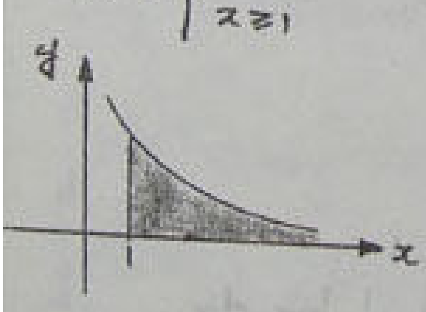
ح: چون مشتق $-x^2$ در انتگرال موجود نمی باشد، لذا بایستی ابتدا نسبت به y انتگرال گرفته سپس نسبت به x. اما با توجه به شکل حدود y و x به صورت زیر می باشد $-x\le y\le x$ ، $x\ge 0$ ، به این ترتیب داریم

$$I=\int_0^{\infty}\int_{-x}^{x} e^{-x^2}\,dy\,dx=\int_0^{\infty}\left(\int_{-x}^{x}dy\right)e^{-x^2}dx$$

$$I=\int_0^{\infty}\left(y\Big|_{-x}^{x}\right)e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}(2xe^{-x^2})\,dx=-e^{-x^2}\Big|_0^{\infty}=-(0-1)=1$$

$$\left(e^{-x^2}\Big|_0^{\infty}=\lim_{b\to+\infty}e^{-x^2}\Big|_0^{b}=\lim_{b\to\infty}(e^{-b^2}-1)=0-1=-1\right)$$

② همگرائی یا واگرائی انتگرال $I=\iint_R \frac{dA}{x+y}$ ، $R:\begin{cases} y=\frac{1}{x}\\ x\ge 1\end{cases}$



ح: با توجه به شکل انتگرال به صورت زیر نوشته می شود

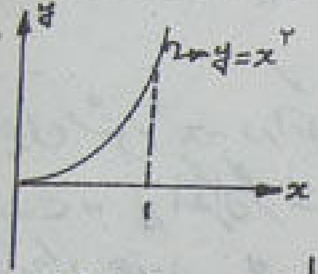
$$I=\iint_R\frac{dA}{x+y}=\int_1^{+\infty}dx\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{dy}{x+y}$$

$$I=\int_1^{\infty}\ln(x+y)\Big|_0^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^{\infty}\left[\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\ln x\right]=\int_1^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

نکته: اگر $u>0$ آنگاه $0<\ln(1+u)<u$ ، به این ترتیب می توان نوشت

$$0<\iint_R \frac{dA}{x+y} = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx < \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -(0-1)=1$$

به این ترتیب ثابت شد $0<I<1$ ، یعنی مقدار انتگرال همگرا باشد.

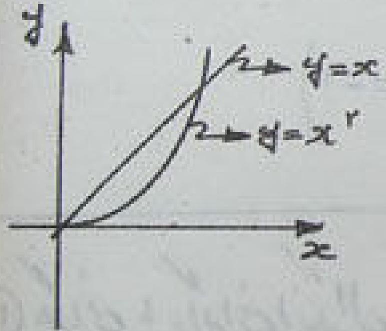


۳) $R:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases}$ $\quad I=\iint_R \frac{dA}{(x+y)^2}$

ج: با توجه به شکل داریم

$$I=\iint_R\frac{dA}{(x+y)^2} = \int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{dy}{(x+y)^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{-1}{(x+y)}\Big|_0^{x^2}dx$$

$$I=\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)dx = \int_0^1\frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$$



۴) $R:\begin{cases}y\le x\\ y\ge x^2\end{cases}$ $\quad I=\iint_R \frac{dA}{xy}$

ج: با توجه به شکل داریم

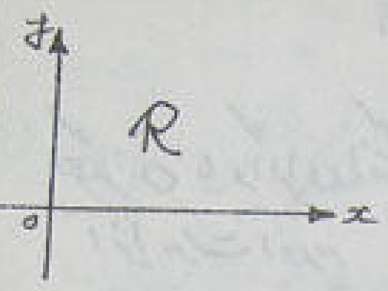
$$I=\iint_R\frac{dA}{xy} = \int_0^1\int_{x^2}^{x}\frac{dy}{xy}\cdot dx = \int_0^1 \frac{1}{x}(\ln y)\Big|_{x^2}^{x}\cdot dx$$

$$I=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\ln x-\ln x^2\right)dx = \int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}\cdot dx = -\int_0^1\frac{1}{x}\ln x\cdot dx$$

$$u=\ln x \rightarrow \begin{cases}\overset{x\to 0^+}{x=0} \rightarrow u=-\infty\\ x=1 \rightarrow u=0\end{cases} \rightarrow I=-\int_{-\infty}^{0}u\,du = \frac{-1}{2}u^2\Big|_{-\infty}^{0} = -\infty$$
$du=\frac{dx}{x}$

به این ترتیب شاهده می‌شود انتگرال واگرا می‌باشد.

⑤ $I=\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA$ ، $R:\begin{cases}x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$



ح: با توجه به شکل R ، حدود انتگرال به شکل زیر می باشد

$0\le x<+\infty$ ، $0\le y<+\infty$

چون مشتق (x^2+y^2) برحسب x یا y درکنار تابع $e^{-(x^2+y^2)}$ وجود ندارد از مختصات قطبی استفاده می نمائیم زیرا ممکن است در این حالت انتگرال ساده تر شود. لذا می توان نوشت

$$I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}d\theta$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{2}(0-1)\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

---

⑥ $I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}xy\,e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$ (ناحیه R همانند تمرین ۵ می باشد)

ح: ناحیه انتگرالگیری ربع اول می باشد. با استفاده از مختصات قطبی می توان نوشت

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} r^2\cos\theta\sin\theta\, e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\left(\int_0^{\infty} r^3e^{-r^2}dr\right)d\theta$$

$$\int r^3e^{-r^2}dr=\int r^2\cdot re^{-r^2}dr\to \begin{cases}u=r^2\\ dv=re^{-r^2}dr\end{cases}\to \begin{matrix}du=2r\,dr\\ v=\frac{-1}{2}e^{-r^2}\end{matrix}$$

$$\int r^3e^{-r^2}dr=\frac{-1}{2}r^2e^{-r^2}+\frac{1}{2}\int 2re^{-r^2}dr=\frac{-1}{2}r^2e^{-r^2}-\frac{1}{2}e^{-r^2}=\frac{-1}{2}(r^2+1)e^{-r^2}$$

$$\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2}dr=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{2}(r^2+1)e^{-r^2}\Big|_0^b=\frac{-1}{2}\lim_{b\to+\infty}(b^2+1)e^{-b^2}-\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^2+1}{e^{b^2}}=0\to\int_0^{+\infty}r^3e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}\to I=\left(\frac{1}{2}\right)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-1}{2}\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=\frac{-1}{8}(-1-1)=\frac{1}{4}$$

تمرینات برای حل

همگرائی یا واگرائی انتگرالهای زیر را مشخص کنید. در صورت همگرا بودن مقدار آنرا بدست آورید

(۱) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$

(۲) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$

(۳) $I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^2}$

(۴) $I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$

(۵) $I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(x+y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy$

(۶) $I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}xy\,e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

(۷) $I=\int_{0}^{\infty}\int_{x}^{\infty}e^{-y^2}\,dy\,dx$

(۸) $I=\int_{0}^{\infty}dx\int_{2x}^{\infty}x\,e^{-y}\,\frac{\sin y}{y^2}\,dy$

(۹) $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$

(۱۰) $I=\iint_R\frac{dA}{x^4+y^2}\qquad R:\begin{cases}x\geq 1\\ y\geq x^2\end{cases}$

جواب تمرینات

① واگرا ② ۲π

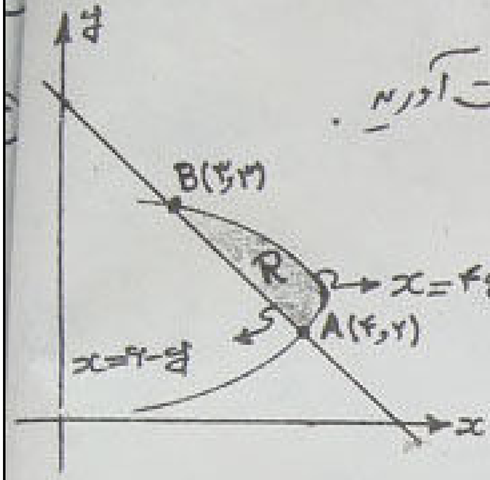
③ $\frac{\pi}{۴a^۲}$ ④ ۴

⑤ ۲ ⑥ $\frac{۱}{۴}$

⑦ $\frac{۱}{۲}$ ⑧ $\frac{۱}{۶}$

⑨ $\frac{۱}{۲}$ ⑩ $\frac{\pi}{۴}$

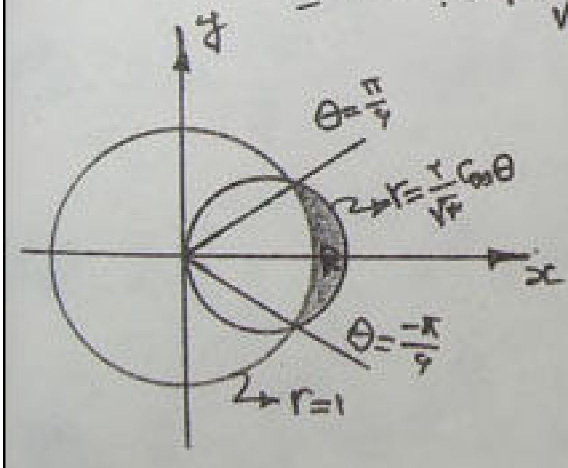
① سطح محدود به ناحیه $R: \begin{cases} x=4y-y^2 \\ x+y=6 \end{cases}$ را بدست آورید.



ح : در انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y)\,dA$ اگر $f(x,y)=1$ آنگاه مقدار انتگرال برابر با سطح ناحیه R خواهد بود. طبق شکل بایستی از نوار افقی استفاده نمود. لذا خواهیم داشت

$$A=\int_2^3\int_{6-y}^{4y-y^2} dx\,dy=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy=\int_2^3\left[(4y-y^2)-(6-y)\right]dy=\frac{1}{6}$$

② مساحت محدود به خارج $r=1$ و داخل $r=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ را بدست آورید.



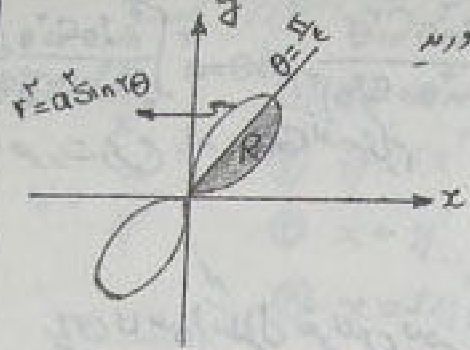
ح : دو منحنی را قطع میدهیم تا مختصات محل برخورد دو منحنی بدست آید. چون در شکل تقارن مشاهده میشود می توان مساحت در ربع اول را در ۲ ضرب نمائیم.

$$\begin{cases} r=1 \\ r=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \end{cases} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta=1 \qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta=\frac{\pi}{6},\ \theta=\frac{-\pi}{6}$$

$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} r\,dr\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2\Big|_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{3}\cos^2\theta-1\right)d\theta$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos2\theta-1\right)d\theta=\frac{1}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$$

(۲) مساحت محدود به منحنی $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ را بدست آورید.



حل: ابتدا از دستگاه قطبی استفاده می‌نماییم و شکل را رسم می‌کنیم. زیرا در مختصات دکارتی به دلیل بالا بودن درجه نمی‌توان به راحتی آن را رسم نمود

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \rightarrow \quad r^4 = 2a^2r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$r^4 = a^2r^2\sin 2\theta \rightarrow r^2(r^2 - a^2\sin 2\theta) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{و} \quad r^2 = a^2\sin 2\theta$$

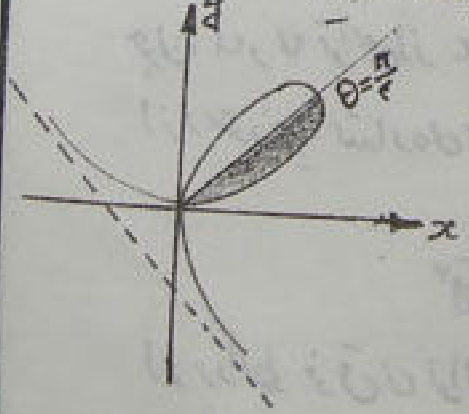
با توجه به شکل می‌توان مساحت در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ را محاسبه نمود و ۴ برابر نمود.

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} . \,d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin 2\theta\,d\theta = a^2$$

---

(۱) مساحت داخل حلقه $r = \dfrac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$ را بدست آورید.



حل: می‌توان نشان داد که این منحنی نسبت به خط $\theta=\frac{\pi}{4}$ متقارن می‌باشد. طبق شکل می‌توان مساحت را در فاصله $[0,\frac{\pi}{4}]$ محاسبه نمود و در ۲ ضرب کرد

به این ترتیب مقدار مساحت به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}} r\,dr\,d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\, d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta(1+tg^3\theta)^2}\, d\theta$$

صورت و مخرج را به $\cos^6\theta$ تقسیم می‌کنیم

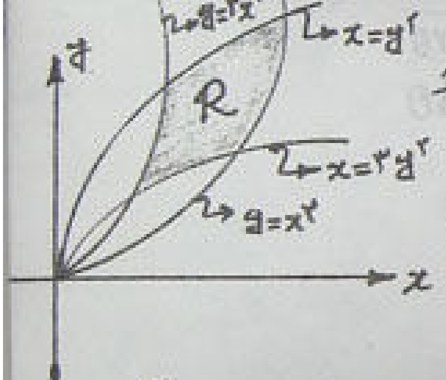
$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2\theta \, \frac{1}{\cos^2\theta}}{(1+tg^3\theta)^2}\, d\theta$$

برای محاسبه انتگرال تعویض متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$u = 1+tg^3\theta \begin{cases} \theta=0 \to u=1 \\ \theta=\frac{\pi}{4} \to u=2 \end{cases} \longrightarrow I = \frac{a^2}{3}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{a^2}{6}$$

$$du = 3\, tg^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{1}{6}a^2$$



⑤ مساحت محدود به منحنی‌های $\begin{cases} x=y^2 \\ x=3y^2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x^2 \end{cases}$ را بدست آورید

Ⓒ: طبق شکل استفاده از مختصات دکارتی نیاز به محاسبات پیچیده و طولانی دارد. لذا از تعویض متغیر زیر استفاده می‌نماییم:

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^2} \\ v = \frac{x}{y^2} \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

چون u و v توابعی از x و y می‌باشند، لذا برای محاسبه $J(u,v)$ از دستور زیر استفاده می‌نماییم

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2y^2}$$

از روابط فوق می‌توان نوشت

$$uv = \frac{1}{xy} \rightarrow \frac{1}{x^2y^2} = u^2v^2$$

در نتیجه

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{3u^2v^2}$$

با توجه به شکل ناحیه G در صفحه uv دارای مرزهای شکل زیر است

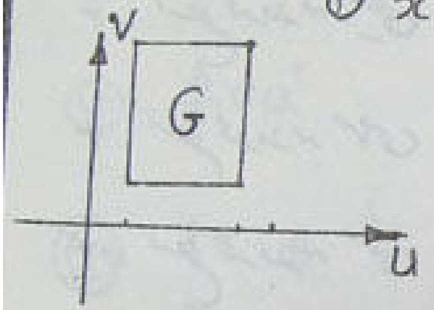
$$u=\frac{y}{x^2} \qquad v=\frac{x}{y^2}$$

① $y=x^2 \rightarrow \frac{y}{x^2}=u=1$

② $y=2x^2 \rightarrow \frac{y}{x^2}=2 \rightarrow u=2$

③ $x=y^2 \rightarrow \frac{x}{y^2}=v=1$

④ $x=3y^2 \rightarrow \frac{x}{y^2}=3 \rightarrow v=3$



به این ترتیب مقدار مساحت به شکل زیر محاسبه میگردد

$$A=\iint_R dA=\iint_G J(u,v)\,dv\,du$$

$$A=\int_1^2\int_1^3 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^2v^2}\right)dv\,du=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{1}{u^2}\left(\frac{-1}{v}\right)\Big|_1^3 du=\frac{1}{3}\int_1^2\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{u^2}du$$

$$\rightarrow \quad A=\frac{1}{9}$$

تمرینات برای حل

مطلوبست محاسبه سطح محدود به منحنی های زیر با استفاده از انتگرال دوگانه

۱- سطح محدود به خطوط $y=x$ ، $y=5x$ و $x=1$

۲- سطح محدود به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

۳- سطح محدود به سهمی $y^2=\frac{b^2}{a}x$ و خط $y=\frac{b}{a}x$.

۴- سطح محدود به منحنی $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

۵- سطح محدود به $(x+y)^3=xy$ در ربع اول.

۶- سطح محدود به منحنی های $x^2+y^2=2x$ ، $x^2+y^2=4x$ ، $y=x$ و $y=0$.

۷- ناحیه محدود به منحنی های $r=a(1+\cos\theta)$ و $r=a\cos\theta$ $(a>0)$

۸- ناحیه محدود به منحنی $(x-2y+3)^2+(3x+4y-1)^2=100$.

۹- ناحیه محدود به منحنی های $y^2=ax$ ، $y^2=bx$ ، $xy=\alpha$ و $xy=\beta$.
(از تعویض متغیر استفاده نمایید) $(0<a<b$ و $0<\alpha<\beta)$

۱۰- سطح داخل دایره $x^2+y^2=4$ و خارج سهمی $y^2=4(1-x)$

۱۱- خارج منحنی $r=(2-\cos\theta)$ و داخل منحنی $r=2$

۱۲- سطح محدود به منحنی های $y=4x-x^2$ و $y=2x^2-5x$.

۱۳- سطح محدود به $(x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2$ ، $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$. $(a>0)$

۱۴- سطح محدود به منحنی های $y=ax^p$ ، $y=bx^p$ ، $y=cx^q$ و $y=dx^q$
$(0<p<q\ ;\ 0<a<b\ ,\ 0<c<d)$

جواب تمرینات

(۱) ۲

(۲) πab

(۳) $\frac{ab}{۶}$

(۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

(۵) $\frac{۱}{۶۰}$

(۶) $۳\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}\right)$

(۷) $\frac{۵}{۴}\pi a^{۲}$

(۸) ۱۰π

(۹) $\frac{۱}{۲}(\beta-\alpha)\ln\frac{a}{b}$

(۱۰) $۲\pi-\frac{۸}{۳}$

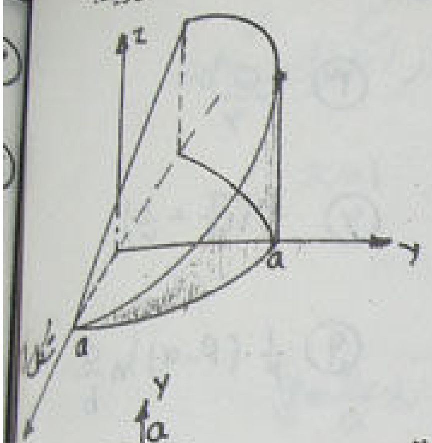
(۱۱) $۸-\pi$

(۱۲) $\frac{۲۷}{۲}$

(۱۳) $a^{۲}\left(\frac{\sqrt{۷}}{۲}+\mathrm{ArcSin}\frac{\sqrt{۱۴}}{۸}\right)$

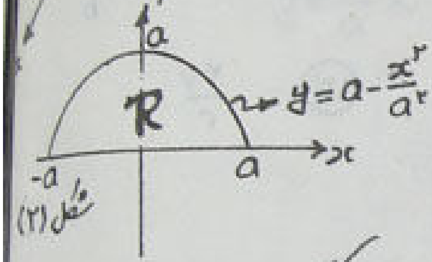
(۱۴) $\frac{q-p}{(p+۱)(q+۱)}\times\left(b^{\frac{q+۱}{q-p}}-a^{\frac{q+۱}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+۱}{q-۱}}-d^{-\frac{p+۱}{q-۱}}\right)$

ابتدا ناحیه V را رسم ،سپس حجم محدود به آن را با استفاده از انتگرال دوگانه بدست آورید.



۱) حجم محدود به رویه های
$$\begin{cases} y=0 \text{ و } z=0 \\ z=a-x+y \\ y=a-\dfrac{x^2}{a} \quad (a>0) \end{cases}$$
را محاسبه نمائید

©: با رسم رویه ها شکل مورد نظر بدست می آید.
ناحیه R در صفحه xoy به شکل زیر رسم شده است.



شکل ۱، از اطراف به استوانه $y=a-\frac{x^2}{a}$، از بالا به صفحه $z=a-x+y$ و از کنار به صفحه $y=0$ و از پائین به صفحه $z=0$ محدود می باشد.

به این ترتیب حدود انتگرال جهت محاسبه حجم به شکل زیر تعیین میگردد

$$V=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-\frac{x^2}{a}}(a+y-x)\,dy\,dx$$

چون تابع x فرد و R نسبت به محور y ها متقارن می باشد، لذا مقدار انتگرال $\iint_R x\,dA$ برابر صفر است. لذا داریم

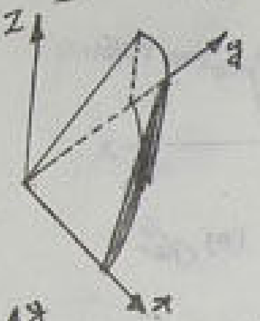
$$V=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-\frac{x^2}{a}}(a+y)\,dy\,dx=\int_{-a}^{a}\left(ay+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{0}^{a-\frac{x^2}{a}}dx$$

$$V=\int_{-a}^{a}\left[a^2-x^2+\frac{1}{2}\left(a^2-2x^2+\frac{x^4}{a^2}\right)\right]dx$$

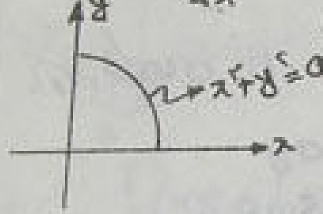
پس از محاسبه انتگرال اخیر مقدار حجم شکل زیر خواهد بود

$$V=\frac{28}{15}a^3$$

۳) حجم محدود به استوانه $x^2+y^2=a^2$ و صفحه $z=y$ را در ناحیه $\frac{1}{8}$ بدست آورید.



ح: چون ناحیه $\frac{1}{8}$ مورد نظر است لذا باید $x\geq 0$، $y\geq 0$ و $z\geq 0$ باشد.
شکل مورد نظر همانطور که مشاهده می‌شود از اطراف به استوانه $x^2+y^2=a^2$ و صفحه $x=0$ و از بالا به صفحه $z=y$ و از پایین محدود می‌باشد
در شکل (۲) نیز ناحیه R رسم شده است
به این ترتیب مقدار حجم V از انتگرال دوگانه زیر محاسبه می‌گردد



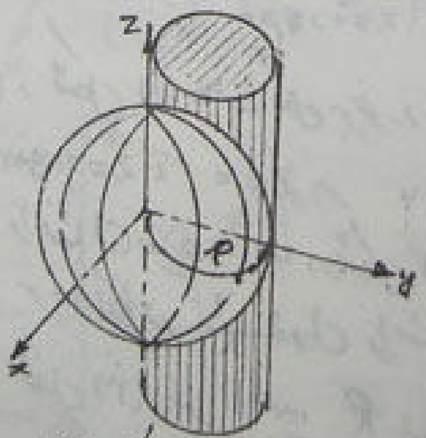
$$V=\int_0^{a\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dA$$

می‌توان از مختصات قطبی استفاده نمود.
برای این کار می‌نویسیم $y=r\sin\theta$ در نتیجه $0\leq r\leq a$ و $0\leq\theta\leq\pi/2$
لذا خواهیم داشت

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a (r\sin\theta)r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\left(\tfrac{1}{3}r^3\right)\Big|_0^a d\theta$$

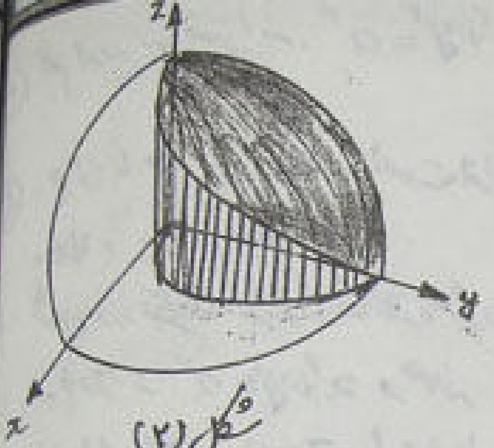
$$\rightarrow V=\frac{a^3}{3}$$

۴) حجم محدود به ناحیه داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و استوانه $x^2+y^2=2ay$ را بدست آورید.

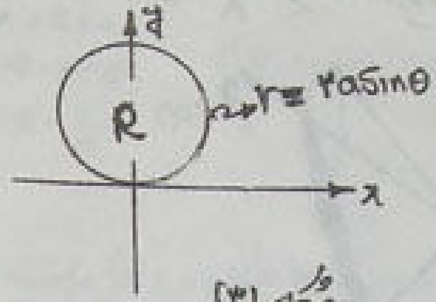


شکل (۱)

ح: با توجه به شکل حجم در ناحیه $\frac{1}{8}$ را در ۴ ضرب می‌کنیم.
شکل (۱)، شکل کلی می‌باشد و شکل (۲) ناحیه را در $\frac{1}{8}$ مشخص می‌کند.



شکل (۲)



شکل (۳)

با توجه به شکل های (۱)، (۲) و (۳) مقدار حجم از دستور زیر محاسبه می گردد

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\sin\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a\sin\theta}\cdot d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{3}\left[(4a^2-4a^2\sin^2\theta)^{3/2}-(4a^2)^{3/2}\right]d\theta$$

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8a^3-8a^3\cos^3\theta)\,d\theta = \frac{16}{9}(3\pi-4)a^3$$

$$x^2+y^2=2ay$$

$$r^2=2ar\sin\theta$$

$$\rightarrow r(r-2a\sin\theta)$$

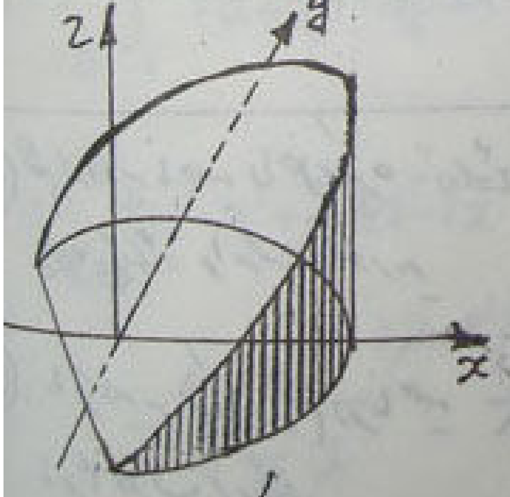
$$r=0\ ,\ r=2a\sin\theta$$

$$x^2+y^2+z^2=4a^2$$

$$z=\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{4a^2-r^2}$$

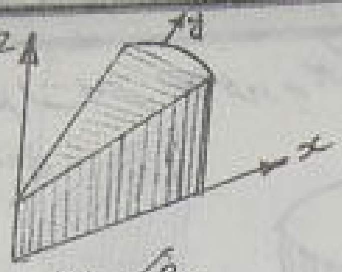
---

۴) حجم محدود به رویه های
$$\begin{cases} z=x+y+2 \\ z=0 \\ x^2+y^2=16 \\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\end{cases}$$
را بدست آوریم.

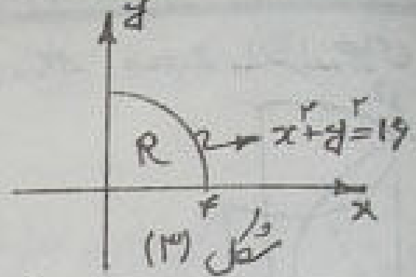


شکل (۱)

ح : شکل (۱) حالت کلی برخورد رویه های $x^2+y^2=16$ و $z=0$ ، $z=x+y+2$ را نشان می دهد. اما در شکل (۲) ناحیه مورد نظر در $\frac{1}{8}$ اول را مشخص می کند. شکل (۳) نیز ناحیه R در صفحه xy می باشد.



شکل (۲)



شکل (۳)

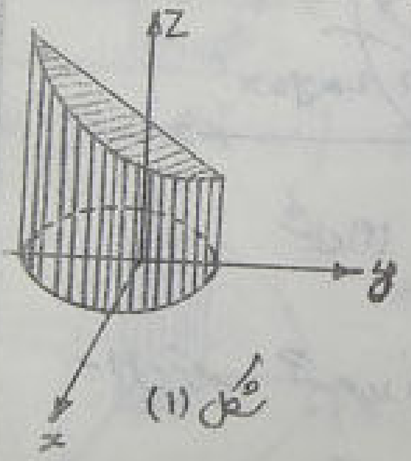
به این ترتیب حجم مورد نظر شکل زیر محاسبه می‌گردد

$$V=\iint_R (x+y+2)\,dA=\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}(x+y+2)\,dy\,dx$$

$$V=\int_0^4\left(xy+\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_0^{\sqrt{16-x^2}}dx=\int_0^4\left[x\sqrt{16-x^2}+\frac{1}{2}(16-x^2)+2\sqrt{16-x^2}\right]dx$$

که پس از محاسبه انتگرال خواهیم داشت

$$V=\frac{128}{3}+8\pi$$



شکل (۱)

(۵) حجم محدود به رویه‌های $\begin{cases}x^2+y^2=4\\ y+z=4\\ z=0\\ x\geq 0\end{cases}$ را بدست آورید.

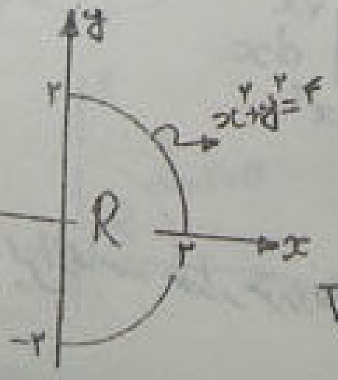
(ح): شکل (۱) ناحیه مورد نظر را نشان می‌دهد و شکل (۲) ناحیه R در صفحه xy را مشخص می‌کند.

بدین ترتیب خواهیم داشت

$$V=\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)\,dx\,dy$$

$$y+z=4\rightarrow z=4-y$$

با استفاده از مختصات قطبی خواهیم داشت



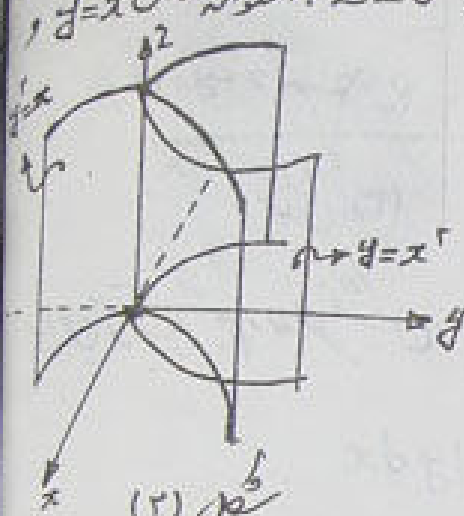
$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2(4-r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(2r^2-\frac{1}{3}r^3\sin\theta\right)\Big|_0^2 d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(8-\frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

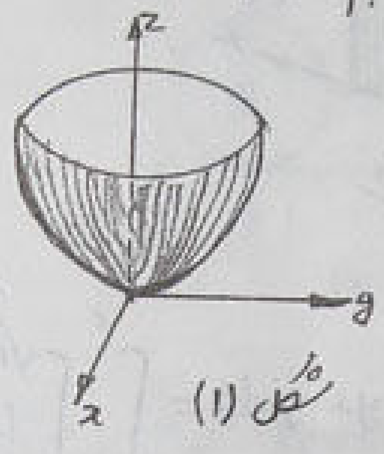
$$V=8\pi$$

۶) مطلوبست محاسبه حجم محدود به سهمیگون $z=x^2+4y^2$ ، صفحه $z=0$ ، استوانه های $x=y^2$ و $y=x^2$.

ح :



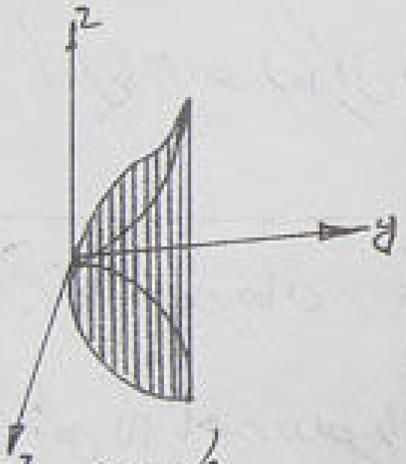
شکل (۲)



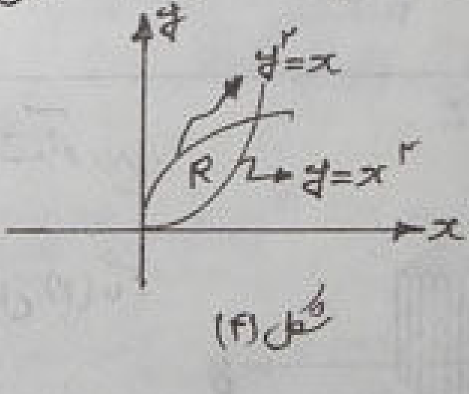
شکل (۱)

ناحیه مورد نظر از محل برخورد دو شکل (۱) و (۲) و صفحه $z=0$ حاصل میگردد. شکل (۳) نمای از محل برخورد رویه های فوق می باشد.

ناحیه R در صفحه xy در شکل (۴) مشخص شده است



شکل (۳)



شکل (۴)

به این ترتیب حجم مورد نظر از دستور زیر محاسبه میگردد که

$$V=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+4y^2)\,dy\,dx=\int_0^1\left(x^2y+\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx$$

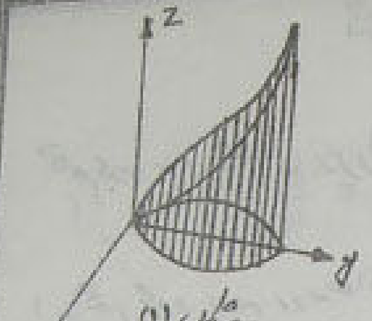
$$V=\int_0^1\left[\left(x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}\right)-\left(x^4+\frac{4}{3}x^6\right)\right]dx$$

پس از محاسبه مقدار مورد نظر بشکل زیر بدست می آید

$$V=\frac{3}{7}$$

⑦ مطلوب است محاسبه حجم محدود به رویه های

$$\begin{cases} x^2+y^2=4z \\ x^2+y^2=8y \\ z=0 \end{cases}$$



شکل (۱)

ح : شکل (۱) ناحیه حجمی مورد نظر را نشان میدهد و شکل (۲) ناحیه R را در صفحه xy مشخص می کند.
به این ترتیب حجم مورد نظر بشکل زیر محاسبه میگردد

$x^2+y^2=8y$

$r^2-8r\sin\theta=0$

$r=0$ و $r=8\sin\theta$

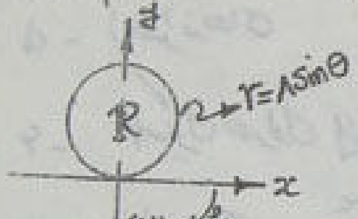
$x^2+y^2=4z$

$z=\frac{1}{4}r^2$

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta} zr\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta}\frac{1}{4}r^3\,dr\,d\theta$$

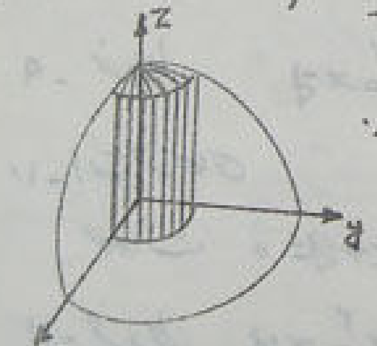
$$V=\frac{1}{16}\int_0^{\pi} r^4\Big|_0^{8\sin\theta}d\theta=\frac{1}{16}\int_0^{\pi}8^4\sin^4\theta\,d\theta$$

$$V=96\pi$$



شکل (۲)

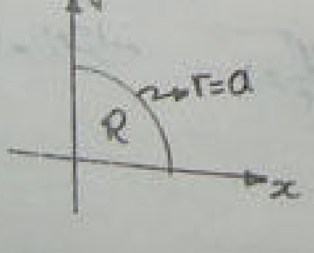
⑧ حجم محدود به کره به شعاع $2a$ و استوانه $r^2=a^2$ را بدست آورید. (کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$)



ح : ناحیه های V و R به ترتیب در شکل های (۱) و (۲) رسم شده اند.
لذا حجم مورد نظر بشکل زیر محاسبه میگردد.

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

حجم ناحیه $\frac{1}{8}$ را در ۸ ضرب می کنیم



$$V=\frac{-8}{(\frac{3}{2})2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a}d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8a^3-3\sqrt{3}a^3)\,d\theta$$

$$V=\frac{4}{3}(8-3\sqrt{3})a^3\pi$$

تمرینات برای حل

حجم محدود به رویه‌های زیر را با استفاده از انتگرال دوگانه به‌دست آورید.

۱- حجم محدود به رویه‌های $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ ، $x=a$ ، $y=b$ در $\frac{1}{8}$ اول.

۲- حجم محدود به صفحات $y=0$ ، $z=0$ ، $3x+y=6$ ، $3x+2y=12$ و $x+y+z=6$

۳- حجم محدود به استوانه‌های $y=\sqrt{x}$ ، $y=2\sqrt{x}$ و صفحات $z=0$ و $x+z=6$.

۴- استوانه $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ و صفحات $z=12-3x-4y$ و $z=1$.

۵- استوانه‌های $z=4-y^2$ ، $y=\frac{1}{2}x^2$ و صفحه $z=0$.

۶- سهموی هذلولی $z=xy$ ، استوانه $y=\sqrt{x}$ و صفحات $x+y=2$ ، $y=0$ و $z=0$

۷- استوانه‌های $y=e^x$ ، $y=e^{-x}$ ، $z=e^2-y^2$ و صفحه $z=0$.

۸- استوانه‌های $y=\ln x$ ، $y=\ln^2 x$ و صفحات $z=0$ و $y+z=1$.

۹- مخروط $z^2=xy$ ، استوانه $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و صفحه $z=0$.

۱۰- استوانه‌های $x^2+y^2=x$ ، $x^2+y^2=2x$ ، سهموی $z=x^2+y^2$ و صفحات $x+y=0$ ، $x-y=0$ و $z=0$.

۱۱- مخروط $z^2=xy$ و استوانه $(x^2+y^2)^2=2xy$ در $\frac{1}{8}$ اول.

۱۲- استوانه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و صفحات $y=0$ ، $z=\frac{x}{2}$ و $z=x$.

جواب تمرینات

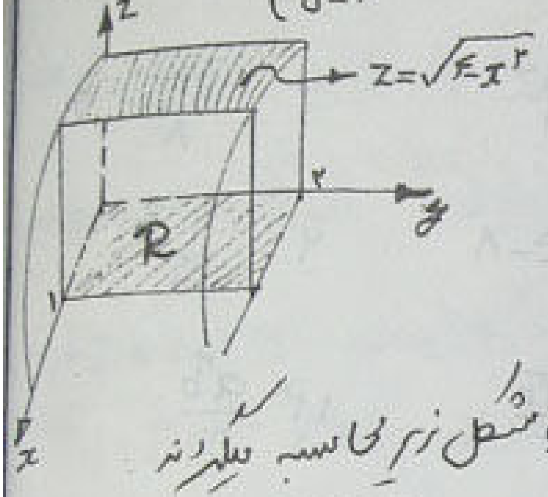
۱ $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$ ۲ ۱۲ ۳ $\frac{48}{5}\sqrt{6}$

۴ 22π ۵ $\frac{256}{21}$ ۶ $\frac{3}{8}$

۷ $2\left(e^2-\frac{2e^3+1}{9}\right)$ ۸ $3e-8$ ۹ $\frac{1}{45}$

۱۰ $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$ ۱۱ $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$ ۱۲ $\frac{a^2b}{3}$

۱) مساحت آن قسمت از سطح $z=\sqrt{4-x^2}$ را که توسط صفحات $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$ در $\frac{1}{8}$ اول قطع شده است، بدست آورید.



ح: سطح مورد نظر از دستور

$$S=\iint_{\sigma} d\sigma$$

که در آن $d\sigma=\frac{|\vec\nabla f|}{|\vec\nabla f\cdot\vec p|}dA$ بدست می آید. $\vec\nabla f$ گرادیان سطح مورد نظر، $\vec p$ بردار قائم در صفحه تصویر رویه می باشد. در این مسأله موارد مذکور به شکل زیر محاسبه می گردند

$$f=z-\sqrt{4-x^2} \rightarrow \vec\nabla f=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\vec i+\vec k$$

سطح مورد نظر را می توان در صفحه xy تصویر نمود که به این ترتیب $\vec p=\vec k$ در اینصورت $d\sigma$ به شکل زیر بدست می آید

$$|\vec\nabla f|=\sqrt{\frac{x^2}{4-x^2}+1}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \quad , \quad \vec\nabla f\cdot\vec k=1$$

$$d\sigma=\frac{|\vec\nabla f|}{|\vec\nabla f\cdot\vec k|}dA=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dA$$

در نتیجه خواهیم داشت

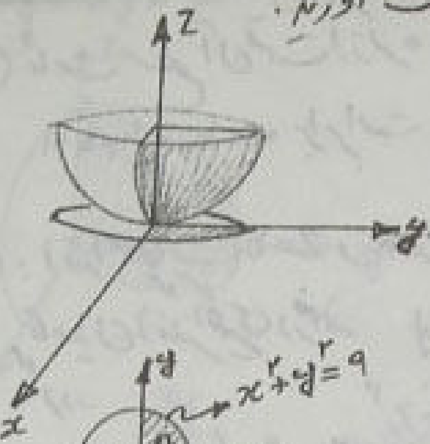
$$S=\iint_{\sigma} d\sigma=\iint_{R}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dA$$

طبق ناحیه R داریم

$$S=\int_0^1\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dy\,dx=\int_0^1\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}(y)\Big|_0^2dx=4\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=4\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$S=\frac{2\pi}{3}$$

۳) سطح $z=x^2+y^2$ را که زیر صفحه $z=9$ می باشد بدست آورید.

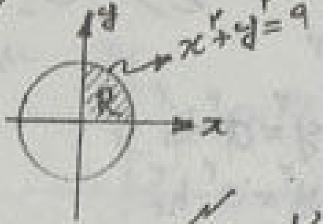


ح: برای محاسبه $d\sigma=\frac{|\vec\nabla f|}{|\vec\nabla f\cdot\vec p|}dA$ به شکل زیر عمل می نمائیم

$$f=x^2+y^2-z \to \vec\nabla f=(2x)\vec i+(2y)\vec j-\vec k$$

$$|\vec\nabla f|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

$$\vec p=\vec k \to \vec\nabla f\cdot\vec p=-1 \to |\vec\nabla f\cdot\vec k|=1$$



به این ترتیب داریم $d\sigma=\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\;dA$

در نتیجه مقدار سطح از دستور $S=\iint_\sigma d\sigma$ به شکل زیر محاسبه میگردد

$$S=\iint_\sigma d\sigma=\iint_R\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\;dA$$

برای مشخص کردن ناحیه R ، رویه $z=x^2+y^2$ را با صفحه $z=9$ قطع میدهیم

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=9 \end{cases} \to x^2+y^2=9$$

چون ناحیه R متقارن و رویه $z=x^2+y^2$ نیز نسبت به صفحات $x=0$ و $y=0$ متقارن است ، لذا می توان سطح محدود به $\frac{1}{8}$ را محاسبه و بعد ۴ برابر نمود.

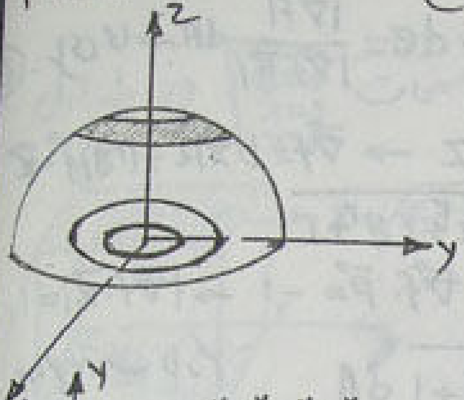
به این ترتیب می توان نوشت
(از مختصات قطبی استفاده می نمائیم)

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3\sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{12}(37^{\frac{3}{2}}-1)\,d\theta$$

$$S=\frac{\pi}{6}(37^{\frac{3}{2}}-1)$$

۳) ثابت کنید سطح آن قسمت از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ قطع شده توسط صفحات $\begin{cases} z=h_1 \\ z=h_2 \end{cases}$ برابر است با $S=2\pi a(h_2-h_1)$. $0<h_1\le h_2\le a$

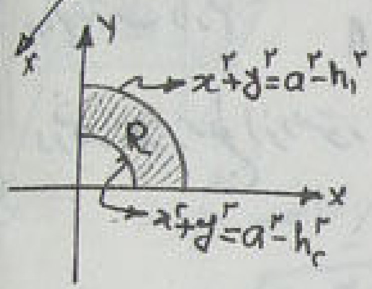


ح: ابتدا صفحات $z=h_1$ و $z=h_2$ را با کره قطع میدهیم تا میدان انتگرالگیری در صفحه xy (یعنی R) مشخص گردد

$$x^2+y^2=a^2-z^2$$

$$z=h_1 \rightarrow x^2+y^2=a^2-h_1^2$$

$$z=h_2 \rightarrow x^2+y^2=a^2-h_2^2$$



فرض کنید $c^2=a^2-h_1^2$ ، $d^2=a^2-h_2^2$ به این ترتیب ناحیه R سطح یک حلقه طبق شکل می باشد که در ربع اول صفحه xy واقع باشد.

برای محاسبه سطح مراحل زیر را انجام میدهیم

ضریب ۴ در محاسبه S به دلیل محاسبه کل سطح می باشد

$$S=4\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \vec{k}|}\,dA$$

$$f=x^2+y^2+z^2-a^2$$

$$\vec{\nabla} f=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k} \rightarrow |\vec{\nabla} f|=\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}$$

*: چون نقاط روی سطح کره مورد نظر باشند لذا می توان بجای $x^2+y^2+z^2$ مقدار a^2 را قرار داد ولی اگر داخل کره مورد نظر باشد نمی توان a^2 قرار داد.

به این ترتیب داریم

$$|\vec{\nabla} f|=2a \quad , \quad |\vec{\nabla} f\cdot \vec{k}|=|2z|=2z \rightarrow z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

در این صورت می توان نوشت

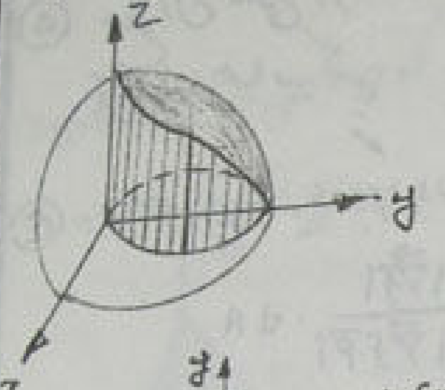
$$S=4\iint_R \frac{2a}{2\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,dA$$

طبق شکل R با استفاده از مختصات قطبی می توان نوشت

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_d^c \frac{2a}{2\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_d^c d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{a^2-d^2}\right)d\theta$$

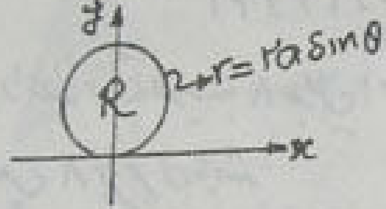
$$S=2a(h_2-h_1)\pi$$

۳) مطلوبست محاسبه آن قسمت از کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ که درون استوانه $x^2+y^2=2ay$ قرار دارد.



حل: طبق شکل یک قسمت از سطح را محاسبه و در دو ضرب می‌کنیم
مراحل زیر را بکار می‌گیریم

$$S=2\iint_R \frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f\cdot \vec{k}|}\,dA$$



$$f=x^2+y^2+z^2-4a^2 \qquad \vec{\nabla} f=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix}$$

$$|\vec{\nabla} f|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4a$$

$$|\vec{\nabla} f\cdot\vec{k}|=|2z|=2\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}$$

$$x^2+y^2=2ay \Rightarrow r^2-2ar\sin\theta=0$$

$$S=2\iint_R \frac{4a}{2\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}}\,dA=4a\int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}(4a^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}\,r\,dr\,d\theta$$

$$S=4a\int_0^{\pi}\left[-(4a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^{2a\sin\theta}d\theta=4a\int_0^{\pi}\left[2a-\sqrt{4a^2-4a^2\sin^2\theta}\right]d\theta$$

$$S=8a\int_0^{\pi}\left(1-\sqrt{\cos^2\theta}\right)d\theta$$

اما برای $\sqrt{\cos^2\theta}$ با توجه به فاصله $[0,\pi]$ باید نوشت

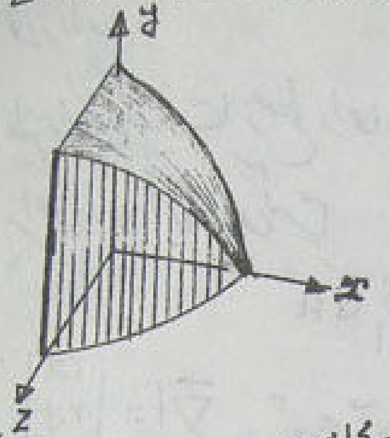
$$\sqrt{\cos^2\theta}=\begin{cases}\cos\theta & 0<\theta\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos\theta & \frac{\pi}{2}\le\theta<\pi\end{cases}$$

در نتیجه داریم

$$S=8a\left[\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos\theta)\,d\theta\right]$$

$$S=8a^2(\pi-2)$$

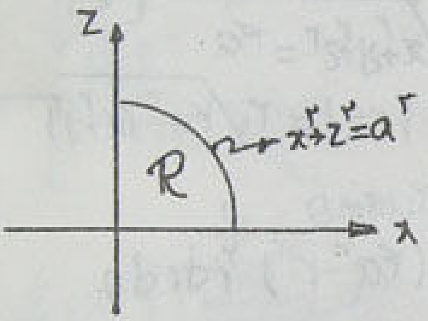
⑤ سطح آن قسمتی از استوانه $x^2+y^2=a^2$ را که درون استوانه $x^2+z^2=a^2$ قرار دارد حساب کنید.



ح: مراحل زیر باید انجام گردد

$$S = 8\iint_R \frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f\cdot\vec{P}|}\cdot dA$$

در رابطه فوق ضریب ۸ بدلیل این است که سطح در $\frac{1}{8}$ محاسبه و سپس ۸ برابر می باشد.



R ناحیه انتگرالگیری در صفحه xz می باشد.

$\vec{P}=\vec{j}$ زیرا عمود بر صفحه xz می باشد

$$f = x^2+y^2-a^2 \rightarrow \vec{\nabla} f = 2x\vec{i}+2y\vec{j}$$

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{4(x^2+y^2)} = 2a \rightarrow (x^2+y^2=a^2)$$

$$\vec{\nabla} f\cdot\vec{P} = \vec{\nabla} f\cdot\vec{j} = 2y \rightarrow |\vec{\nabla} f\cdot\vec{j}| = |2y|$$

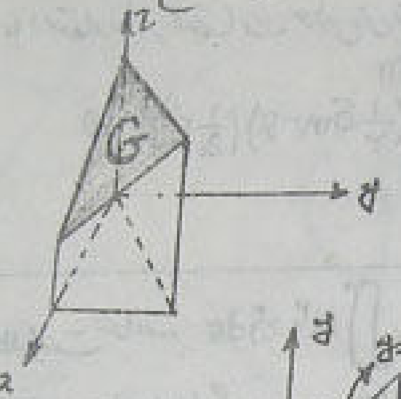
$$|\vec{\nabla} f\cdot\vec{j}| = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$S = 8\iint_R \frac{2a}{2\sqrt{a^2-x^2}}\, dA \qquad dA = dz\,dx$$

$$S = 8a\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dz\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8a\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}(z)\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx$$

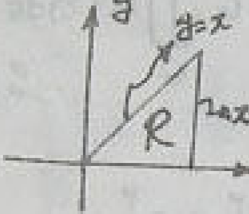
$$S = 8a^2$$

⑥ مطلوب است محاسبه انتگرال رویه ای $\iint_G (xy+z)\,d\sigma$ که G قسمتی از صفحه $2x-y+z=3$ می باشد که توسط صفحات $y=0$ ، $x=1$ و $x=y$ قطع شده است.



ح: سطح مورد نظر و ناحیه انتگرال گیری در شکل ها مشاهده می شوند
برای محاسبه انتگرال مورد نظر بشکل زیر عمل می نمائیم

$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f\cdot\vec{P}|}\,dA \quad , \quad \vec{P}=\vec{k}$$



$$f=2x-y+z-3 \rightarrow \vec{\nabla} f=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

$$|\vec{\nabla} f|=\sqrt{6} \quad , \quad |\vec{\nabla} f\cdot\vec{k}|=1$$

به این ترتیب می توان نوشت

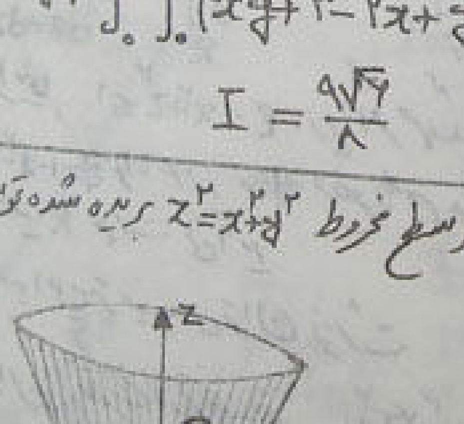
$z=3-2x+y$

$$I=\iint_G (xy+z)\,d\sigma=\iint_R [xy+(3-2x+y)]\frac{\sqrt{6}}{1}\,dA$$

$$I=\sqrt{6}\int_0^1\int_0^x (xy+3-2x+y)\,dy\,dx=\sqrt{6}\int_0^1 \left[\frac{x}{2}y^2+(3-2x)y+\frac{1}{2}y^2\right]\Big|_0^x dx$$

$$I=\frac{9\sqrt{6}}{8}$$

⑦ مطلوب است محاسبه $\iint_G xyz\,d\sigma$ ، که G آن قسمت از سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ بریده شده توسط صفحات $z=1$ و $z=4$ می باشد.



ح: مراحل محاسبه انتگرال فوق بشکل زیر عمل می نمائیم

$$f=x^2+y^2-z^2 \rightarrow \vec{\nabla} f=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}$$

$$|\vec{\nabla} f|=\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}=2\sqrt{x^2+y^2+(x^2+y^2)}$$

$$|\vec{\nabla} f|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|\vec{\nabla} f\cdot\vec{k}|=2z=2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$d\sigma = \frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f\cdot \vec{k}|}\, dA = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\, dA = \sqrt{2}\, dA$$

به این ترتیب مقدار انتگرال به شکل زیر محاسبه می‌گردد

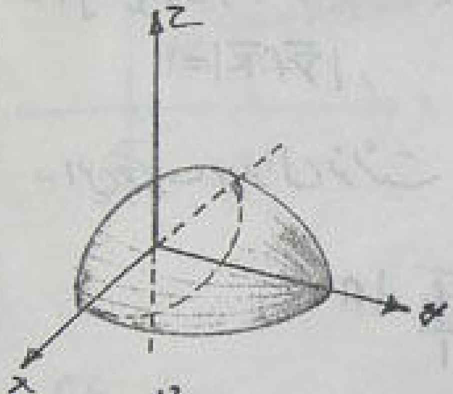
$$I = \iint_R xyz\,(\sqrt{2}\,dA) = \int\int_R xy\sqrt{x^2+y^2}\,(\sqrt{2}\,dA)$$

با استفاده از مختصات قطبی می‌توان نوشت

$$I=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 r^2\sin\theta\cos\theta \cdot r\,(r\,dr\,d\theta) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\left(\frac{1}{5}r^5\right)\Big|_1^4 d\theta$$

$$\to I=0$$

۸) مطلوبست محاسبه $\iint_G (x^2+z^2)\,d\sigma$ ، G آن قسمت از سهمیگون $y=1-x^2-z^2$ قطع شده توسط صفحه $y=0$ می‌باشد.



ح:

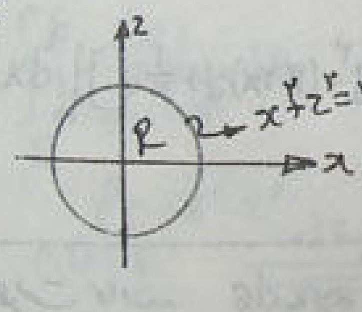
$f = x^2+y+z^2-1$ $\qquad \vec{p}=\vec{j}$

$\vec{\nabla} f = 2x\vec{i}+\vec{j}+2z\vec{k}$ $\qquad |\vec{\nabla} f\cdot \vec{p}|=1$

$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{4(x^2+z^2)+1}$

$$I=\iint_G (x^2+z^2)\,d\sigma = \iint_R (x^2+z^2)\frac{\sqrt{4(x^2+z^2)+1}}{1}\, dA$$

$dA=dz\,dx$



در اینجا $R: x^2+z^2\le 1$ زیرا اگر سهمیگون $y=1-x^2-z^2$ را با صفحه $y=0$ قطع دهیم مرز ناحیه R بدست می‌آید

$x^2+z^2=1$ $\qquad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ z=r\sin\theta \end{cases}$

به این ترتیب می‌توان نوشت

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta$$

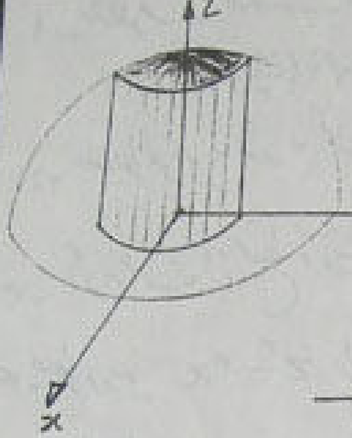
در این انتگرال از تعویض متغیر $u^2=4r^2+1$ برای محاسبه $\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\,dr$ استفاده می‌نماییم

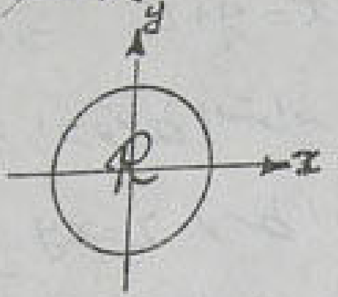
$u^2=4r^2+1 \to 2u\,du=8r\,dr \to r\,dr=\frac{1}{4}u\,du$

$r^2=\frac{1}{4}(u^2-1) \to \begin{matrix} r=0 \\ u=1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} r=1 \\ u=\sqrt{5} \end{matrix}$

$$\to I=\frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}}(u^2-1)u^2\,du\,d\theta = \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_1^{\sqrt{5}}d\theta \to I=\frac{25\sqrt{5}+1}{60}\pi$$

۹) مطلوبست محاسبه $\iint_G z\,d\sigma$ که G سطح قطع شده کره $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ توسط استوانه $x^2+y^2=4$ می باشد





ح: جهت محاسبه انتگرال مراحل زیر را انجام میدهیم

$$f=x^2+y^2+z^2-9$$
$$\nabla f=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$
$$|\vec{\nabla} f|=\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}=6$$
$$|\vec{\nabla} f\cdot\vec{k}|=2|z| \quad 2z$$
$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f\cdot \vec{p}|}dA=\frac{6}{2z}dA$$

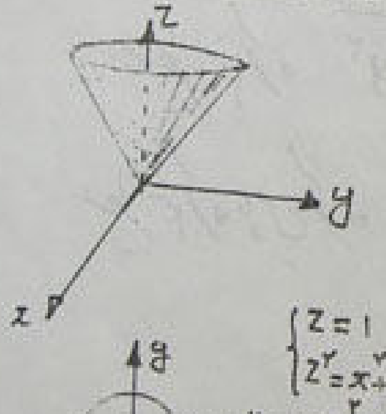
$$I=\iint_G z\,d\sigma=\iint_R z\left(\frac{6}{2z}dA\right)=3\iint_R dA$$

اما مقدار $\iint_R dA$ که برابر مقدار مساحت ناحیه R یعنی $R: x^2+y^2\le 4$ مساحت دایره $x^2+y^2=4$ می شود، لذا داریم

$$I=3(4\pi)=12\pi$$

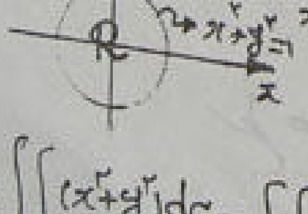
---

۱۰) مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_G (x^2+y^2)\,d\sigma$ که G سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ قطع شده توسط صفحات $z=0$ و $z=1$ می باشد.



ح:

$$f=x^2+y^2-z^2=0 \rightarrow \vec{\nabla} f=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}$$



$$\begin{cases} z=1 \\ z^2=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$|\vec{\nabla} f|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{2z^2}=2\sqrt{2}z$$
$$|\vec{\nabla} f\cdot\vec{k}|=2|z|=2z \quad z>0$$
$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f\cdot\vec{k}|}dA=\frac{2\sqrt{2}z}{2z}dA=\sqrt{2}dA$$

$$I=\iint_G (x^2+y^2)d\sigma=\iint_R (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1 d\theta$$

$$I=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

تمرینات برای حل

۱- مطلوبست آن قسمت از سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ در بالای صفحه xy که توسط صفحه $z=\sqrt{2}(\frac{x}{2}+1)$ بریده شده باشد.

۲- سطح بریده شده مخروط $z^2=x^2+y^2$ توسط استوانه $z^2=2py$ را بدست آورید.

۳- آن قسمت از سطح رویه $x^2=y^2+z^2$ که داخل استوانه $x^2+y^2=a^2$ می باشد بدست آورید.

۴- سطح رویه $z^2=4x$ را که توسط استوانه $y^2=4x$ و صفحه $x=1$ قطع شده است بدست آورید.

۵- سطح قطع شده رویه $z=xy$ توسط استوانه $x^2+y^2=a^2$ را بدست آورید.

۶- سطح آن قسمت از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ قطع شده توسط استوانه زیر را بدست آورید

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

در مسائل زیر انتگرال روی سطوح داده شده را بدست آورید

۷. $\iint_\sigma (z+2x+\frac{4}{3}y)\,d\sigma$ 　 σ: سطح صفحه $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ در $\frac{1}{8}$

۸. $\iint_\sigma y\,d\sigma$ 　 σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ سطح نیم کره

۹. $\iint_\sigma x^2y^2z\,dx\,dy$ 　 σ: $x^2+y^2+z^2=a^2$ سطح نیم کره پایین کره

۱۰. $\iint_\sigma xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dz\,dx$

σ: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ سطح هرم متشکل از صفحات

جواب تمرینات

① 8π ② $2\sqrt{2}\,\pi p^2$ ③ $2\pi a^2$

④ $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$ ⑤ $\frac{2\pi}{3}\left[(1+a^2)^{3/2}-1\right]$

⑥ $2a^2(\pi+4-4\sqrt{2})$ ⑦ $4\sqrt{61}$

⑧ 0 ⑨ $\frac{32\pi a^7}{105}$ ⑩ $\frac{1}{8}$